

## Κεφάλαιο 7

### ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΟΣΑ

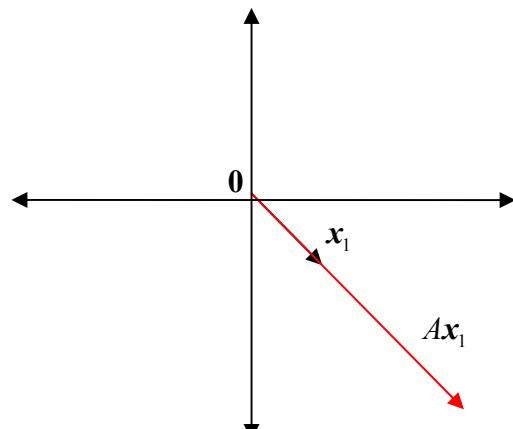
#### 7.1 Βασικοί Ορισμοί

Γενικά, για έναν τετραγωνικό πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , ο μετασχηματισμός  $x \rightarrow Ax$  μπορεί να μετακινήσει τα διανύσματα  $x$  σε ποικίλες διευθύνσεις. Συχνά παρουσιάζονται κάποια διανύσματα που η δράση του πίνακα πάνω τους τα αναγκάζει να κινηθούν κατά την ίδια διεύθυνση, δηλαδή είναι συγγραμμικά.

Για παράδειγμα, θεωρώντας τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ και το διάνυσμα } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

όπως φαίνεται και στο Σχήμα 7.1, η δράση του πίνακα στο διάνυσμα δεν επηρεάζει τη διεύθυνσή του, μια και το διάνυσμα  $Ax_1$  είναι ακριβώς το διάνυσμα  $3x_1$ .



Σχήμα 7.1

#### Ορισμός 7.1

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  και ένα διάνυσμα  $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$  τέτοιο ώστε να ισχύει

$$Ax = \lambda x, \text{ με } x \neq 0 \quad (7.1)$$

για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Το  $\lambda$  ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα  $A$  και το  $x$  ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του  $A$ , αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda$ .

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** (ή **χαρακτηριστικά μεγέθη**) του πίνακα  $A$ .

Για παράδειγμα, εύκολα επαληθεύεται ότι, για τον πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , ισχύει

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ και συνεπώς μια ιδιοτιμή του } A \text{ είναι το } 3 \text{ και αντίστοιχο}$$

ιδιοδιάνυσμά της είναι το  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Για το  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  έχουμε

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{x}_2, \text{ και συνεπώς το } \mathbf{x}_2 \text{ δεν είναι}$$

ιδιοδιάνυσμα του  $A$ , επειδή το  $A\mathbf{x}_2$  δεν είναι συγγραμμικό του  $\mathbf{x}_2$ , για καμιά τιμή του  $\lambda \in \mathbb{F}$ , (βλέπε Παράδειγμα 7.2).

Η ισότητα στην (7.1) γράφεται ισοδύναμα  $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , από όπου διαπιστώνουμε ότι, αν γνωρίζουμε την ιδιοτιμή  $\lambda$ , είναι εύκολο να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμά της, λύνοντας το ομογενές σύστημα που προκύπτει από την εξίσωση

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \text{ για } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

**Παράδειγμα 7.1** Θεωρούμε τον πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Αναζητώντας τα

ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , από την (7.2) καταλήγουμε στο ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 - \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι  $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$  για

κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ο πίνακας  $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος, οπότε το σύστημα έχει μόνο

τη μηδενική λύση (Παρατήρηση 2.1), άρα  $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)^t = (0 \ 0)^t$ . Επιπλέον, σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1, ιδιοδιανύσματα θεωρούνται τα μη μηδενικά διανύσματα. Άρα, ο πίνακας  $A$  δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα στο  $\mathbb{R}$ .

Αν όμως ενδιαφερόμαστε για μιγαδικές ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους, το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i.$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές είναι δύο οι  $\pm i$ .

Για  $\lambda = i$ , το σύστημα είναι

$$\left. \begin{array}{l} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = ix_1 \\ x_1 \in \mathbb{C} \end{array},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι, υπάρχουν αντίστοιχα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα, τα οποία είναι  $\mathbf{x} = (x_1 \quad ix_1)'$ ,  $x_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι, στην ιδιοτιμή  $\lambda = -i$  αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{x} = (x_1 \quad -ix_1)'$ ,  $x_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$ . ◆◆◆

Από το Παράδειγμα 7.1, καταλαβαίνουμε ότι, για να υπολογίσουμε όλες τις ιδιοτιμές  $\lambda \in \mathbb{F}$  ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$ , πρέπει να ισχύει η διανυσματική εξίσωση στην (7.2), η οποία οδηγεί σε ομογενές σύστημα, το οποίο έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (7.3)$$

Η εξίσωση στην (7.3) γράφεται πιο αναλυτικά

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (7.4)$$

Δηλαδή, όλες οι ιδιοτιμές  $\lambda \in \mathbb{F}$  του πίνακα  $A$  πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (7.4), η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του τετραγωνικού πίνακα  $A$ .

Το αριστερό μέρος της χαρακτηριστικής εξίσωσης (7.4) είναι ένα πολυώνυμο  $n$ -οστού βαθμού, το οποίο αν πολλαπλασιάσουμε επί  $(-1)^n$  προκύπτει το πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0, \quad (7.5)$$

το οποίο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του  $A$  με συντελεστές  $b_j \in \mathbb{F}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να αναλυθεί πάντοτε σε πρωτοβάθμιους παράγοντες στο  $\mathbb{C}^1$  και να γραφεί στη μορφή

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} (\lambda - \lambda_2)^{v_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{v_i},$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$  είναι οι διακεκριμένες ρίζες του  $\chi_A(\lambda)$  στο  $\mathbb{C}$  και  $v_1, v_2, \dots, v_i$  η πολλαπλότητα κάθε ρίζας, η οποία ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα**.

Είναι φανερό ότι, για έναν πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει  $v_1 + v_2 + \cdots + v_i = n$ . Αν για κάποιο  $i$  ισχύει  $v_i = 1$ , η ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται απλή, διαφορετικά πολλαπλή.

Συνδυάζοντας την (7.2) με την (7.4) καταλαβαίνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (7.5)<sup>1</sup>. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε τον πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ως στοιχείο του  $M_n(\mathbb{R})$ , τότε υπάρχουν το πολύ  $n$  ιδιοτιμές, αν τον θεωρήσουμε ως στοιχείο του  $M_n(\mathbb{C})$  υπάρχουν ακριβώς  $n$  ιδιοτιμές (όχι κατ' ανάγκη όλες διαφορετικές μεταξύ τους). Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$  ονομάζεται **φάσμα** (spectrum) και συμβολίζεται με  $\sigma(A)$ . Αντικαθιστώντας κάθε μία διακεκριμένη ιδιοτιμή,  $\lambda = \lambda_i$ , στο σύστημα (7.2) παίρνουμε ως γενική λύση του ομογενούς συστήματος ένα σύνολο διανυσμάτων που το συμβολίζουμε με  $V(\lambda_i)$ .

## Ορισμός 7.2

Το σύνολο

$$V(\lambda_i) = \{\mathbf{x} \in M_{n \times 1}(\mathbb{F}) : (A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

ονομάζεται **ιδιόχωρος**<sup>2</sup>, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$  και είναι ένας μη τετριμμένος υπόχωρος του  $M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ .

Τα μη μηδενικά στοιχεία του  $V(\lambda_i)$  είναι τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$ , και, σύμφωνα με την Εφαρμογή 4.6, η διάσταση του υποχώρου  $V(\lambda_i)$  είναι

$$\dim V(\lambda_i) = n - r(A - \lambda_i I).$$

<sup>1</sup> Θεμελιώδες θεώρημα άλγεβρας: «Κάθε πολυωνυμική εξίσωση  $n$  βαθμού έχει ακριβώς  $n$  ρίζες στο  $\mathbb{C}$ ».

<sup>2</sup> Ο ιδιόχωρος είναι ο χώρος λύσεων του πίνακα  $A - \lambda_i I$ , βλέπε Παράδειγμα 4.2 (iv).

Ο αριθμός  $\dim V(\lambda_i)$  ονομάζεται *γεωμετρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής  $\lambda_i$  και φανερώνει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$ .

**Παρατήρηση 7.1** i) Επειδή ισχύει  $A - \lambda I = -(\lambda I - A)$ , η συνθήκη «Το σύστημα που προκύπτει από  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  έχει μη μηδενική λύση» είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη «Το σύστημα που προκύπτει από  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  έχει μη μηδενική λύση». Γι' αυτό δεν έχει σημασία ποιο από τα δυο συστήματα χρησιμοποιείται κατά τον προσδιορισμό των ιδιοδιανυσμάτων. Επίσης, επειδή  $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$ , κατά τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών ενός πίνακα δεν έχει σημασία ποια από τις δύο εξισώσεις χρησιμοποιείται.

ii) Αποδεικνύεται ότι ισχύει  $1 \leq \dim V(\lambda_i) \leq \nu_i$ , συνεπώς, όταν οι ιδιοτιμές είναι απλές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\chi_A(\lambda)$ , δηλαδή  $\nu_i = 1$ , είναι φανερό ότι, από την προηγούμενη ανισοτική σχέση προκύπτει άμεσα,  $\dim V(\lambda_i) = 1$ .

**Παράδειγμα 7.2** Έστω  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου, που υπολογίζεται από την (7.5) και είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 2) - (-2) = (\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι οι πραγματικές ρίζες του  $\chi_A(\lambda)$ , οι οποίες είναι  $\lambda_1 = 3$  και  $\lambda_2 = 4$ . Για κάθε μία από αυτές προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από την (7.2).

• Για  $\lambda_1 = 3$  έχουμε

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 5-3 & 2 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Το ομογενές σύστημα έχει λύση κάθε διάνυσμα του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_1 = 3$ , δηλαδή,  $V(3) = \{x_1(1 \ -1)^t : x_1 \in \mathbb{R}\}$ . Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του  $V(3)$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $A$  αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda_1 = 3$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε ως ιδιοδιάνυσμα του  $A$  το  $(1 \ -1)^t$ , το οποίο βρίσκεται για  $x_1 = 1$ , και είναι «ένας αντιπρόσωπος» της βάσης του  $V(3)$ .

• Για  $\lambda_2 = 4$  έχουμε

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 5-4 & 2 \\ -1 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 4$ , είναι της μορφής  $\mathbf{x} = x_2(-2 \ 1)^t$ ,  $x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ , δηλαδή τα μη μηδενικά στοιχεία του ιδιοχώρου  $V(4) = \{x_2(-2 \ 1)^t : x_2 \in \mathbb{R}\}$ . Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το  $(-2 \ 1)^t$ , το οποίο βρίσκεται για  $x_2 = 1$ . ◆◆◆

Σύμφωνα με το κεφάλαιο 5, αν  $V$  είναι ένας  $\mathbb{F}$ -διανυσματικός χώρος με  $\dim V = n$  σε κάθε γραμμική απεικόνιση  $f: V \rightarrow V$  αντιστοιχεί ένας πίνακας αναπαράστασης  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , έτσι ώστε  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ <sup>1</sup>. Συνδυάζοντας τη σχέση (5.21) με τον Ορισμό 7.1, μπορούμε να ορίσουμε τις έννοιες των ιδιοποσών για μία γραμμική απεικόνιση.

### Ορισμός 7.3

Έστω  $V$  ένας  $\mathbb{F}$ -διανυσματικός χώρος με  $\dim V = n$  και  $f: V \rightarrow V$  μία γραμμική απεικόνιση. Αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα,  $\mathbf{x} \in V$ , τέτοιο ώστε

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x},$$

για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{F}$ , το  $\lambda$  ονομάζεται **ιδιοτιμή** της  $f$  και το  $\mathbf{x}$  είναι ένα **ιδιοδιάνυσμα** της  $f$ , αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda$ .

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης  $f$  ονομάζονται **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** (ή χαρακτηριστικά μεγέθη) της απεικόνισης  $f$ .

<sup>1</sup> Για το συμβολισμό βλέπε τα σχόλια στην Παρατήρηση 8.2.

Θεωρώντας το διανυσματικό χώρο  $V \equiv \mathbb{R}^n$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η «γεωμετρική» ερμηνεία του ιδιοδιανύσματος της γραμμικής απεικόνισης  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι ότι ορίζει μια διεύθυνση πάνω στην οποία όταν επιδράσει η  $f$  σε διανύσματα τα οποία βρίσκονται στη διεύθυνση αυτή, το αποτέλεσμα της δράσης της είναι διάνυσμα που διατηρείται επάνω στον ίδιο φορέα, απλά είναι πολλαπλασιασμένο επί τον αριθμό  $\lambda$ , δηλαδή, είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό του αρχικού διανύσματος.

**Παρατήρηση 7.2** Συνδυάζοντας την ιδιότητα  $f(x) = Ax$ , όπου  $f: V \rightarrow V$  γραμμική απεικόνιση και  $A \in M_n(\mathbb{F})$  οποιοσδήποτε πίνακας αναπαράστασης της  $f$ , σύμφωνα με τον Ορισμό 7.3, συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης  $f$  είναι οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα αναπαράστασης<sup>1</sup>  $A$  της  $f$ . Στα επόμενα, όποτε καλούμαστε να μελετήσουμε προβλήματα που σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά ποσά μίας γραμμικής απεικόνισης  $f$ , θα υπολογίζουμε τον πίνακα αναπαράστασής της ως προς οποιαδήποτε βάση και θα ασχολούμαστε με τις ιδιοτιμές του. Τα ιδιοδιανύσματα της  $f$  θα υπολογίζονται σύμφωνα με τον Ορισμό 7.3, εκτός αν έχουμε επιλέξει την κανονική βάση για να υπολογίσουμε τον πίνακα αναπαράστασης<sup>2</sup>, οπότε τα ιδιοδιανύσματα της  $f$  είναι ακριβώς αυτά του πίνακα αναπαράστασης.

Για παράδειγμα, αν  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $f(x, y) = (5x + 2y, -x + 2y)$ , υπολογίζοντας τον πίνακα αναπαράστασης της  $f$  ως προς την κανονική<sup>2</sup> βάση του  $\mathbb{R}^2$ , βρίσκουμε ότι, ο πίνακας είναι  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , ο οποίος ταυτίζεται με τον πίνακα του

Παραδείγματος 7.2. Επομένως, τα ιδιοποσά της  $f$  είναι αυτά του πίνακα  $A$ , δηλαδή η γραμμική απεικόνιση  $f$  έχει: την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = 3$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $(1 \ -1)^t$  και την ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 4$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $(-2 \ 1)^t$ .

<sup>1</sup> Ο πίνακας αναπαράστασης έχει σχέση με την επιλογή της βάσης στο διανυσματικό χώρο  $V$ . Οι πίνακες αναπαράστασης που προκύπτουν είναι μεταξύ τους όμοιοι, οι ιδιοτιμές των ομοίων πινάκων ταυτίζονται (Πρόταση 7.4), συνεπώς, οι ιδιοτιμές της απεικόνισης  $f$  ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του πίνακα αναπαράστασης, ο οποίος έχει υπολογισθεί ως προς οποιαδήποτε βάση. Δε συμβαίνει το ίδιο με τα ιδιοδιανύσματα, διότι οι όμοιοι πίνακες έχουν διαφορετικά ιδιοδιανύσματα (Πρόταση 7.4).

<sup>2</sup> Όταν ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι ο μοναδιαίος, -οπότε έχουμε επιλέξει την κανονική βάση του χώρου  $V \equiv \mathbb{F}^n$  για να υπολογίσουμε τον πίνακα αναπαράστασης της  $f$  -, τα ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης  $f$  και του πίνακα αναπαράστασης ταυτίζονται, διότι ο πίνακας ομοιότητας είναι ο μοναδιαίος (Πρόταση 7.4).

## 7.2 Βασικές ιδιότητες χαρακτηριστικών ποσών

### Πρόταση 7.1

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , με  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ιδιοτιμές<sup>1</sup> ισχύει

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = (-1)^n b_0, \quad (7.6)$$

όπου  $b_0$  είναι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στην (7.5).

**Απόδειξη :** Αν θέσουμε  $\lambda = 0$  στην (7.5) έχουμε  $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A) = b_0$ , ή πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση επί  $(-1)^n$  παίρνουμε ισοδύναμα

$$\det(A) = (-1)^n b_0. \quad (7.7)$$

Επίσης από τους τύπους του Vieta γνωρίζουμε ότι, όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου σχετίζονται με τους συντελεστές του και μάλιστα ισχύει

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = (-1)^n b_0. \quad (7.8)$$

Από τις ισότητες στην (7.7) και στην (7.8) η απόδειξη είναι πλήρης. ♦♦♦

Από την προηγούμενη πρόταση είναι φανερό ότι, αν κάποια ιδιοτιμή είναι  $\lambda_i = 0$ , τότε  $\det A = 0$ , οπότε ο πίνακας  $A$  δεν είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 2.4). Ισχύει και το αντίστροφο. Έτσι αποδεικνύεται το ακόλουθο πόρισμα :

### Πόρισμα 7.1

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν **δεν** έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή.

Συνδυάζοντας την Πρόταση 7.1, το Πόρισμα 7.1 και την (7.5) καταλήγουμε στο επόμενο συμπέρασμα.

<sup>1</sup> Οι ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα διακεκριμένες, στην ορίζουσα υπολογίζεται κάθε ιδιοτιμή με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

**Πόρισμα 7.2**

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του  $A$  είναι διάφορος του μηδενός.

Στις ακόλουθες προτάσεις διατυπώνονται οι σχέσεις που συνδέουν τα ιδιοποσά ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  με του ανάστροφου πίνακα καθώς και των δυνάμεων του πίνακα  $A$ .

**Πρόταση 7.2**

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , ισχύει

$$\sigma(A) = \sigma(A')$$

δηλαδή, ο ανάστροφος πίνακας  $A'$  έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πίνακα  $A$ .

**Απόδειξη :** Σύμφωνα με τις ιδιότητες,  $(A+B)' = A' + B'$  (Πρόταση 1.2 (ii)), και  $\det(A') = \det A$  (Πρόταση 2.2 (i)), για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A'$  μπορούμε διαδοχικά να γράψουμε τα εξής:

$$\chi_{A'}(\lambda) = \det(\lambda I - A') = \det(\lambda I - A)' = \det(\lambda I - A) = \chi_A(\lambda).$$

Συνεπώς, οι δύο πίνακες έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα, άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. ◆◆◆

**Πρόταση 7.3**

Αν  $\lambda$ ,  $\mathbf{x}$  είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα  $A^k$  είναι  $\lambda^k$  και  $\mathbf{x}$ , όπου  $k \in \mathbb{N}$ .

**Απόδειξη :** Θεωρώντας ότι  $\lambda$  είναι ιδιοτιμή και  $\mathbf{x}$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1, ισχύει η ισότητα,  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ισότητα αριστερά επί  $A$  παίρνουμε

$$A^2\mathbf{x} = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}. \quad (7.9)$$

Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα στην (7.9) αριστερά επί  $A$  και κάνοντας αντικατάσταση από την ισότητα στην (7.1), παίρνουμε

$$A^3\mathbf{x} = \lambda^2(A\mathbf{x}) = \lambda^2(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^3\mathbf{x}.$$

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάποιο  $k$  ισχύει  $A^{k-1}\mathbf{x} = \lambda^{k-1}\mathbf{x}$ , οπότε πολλαπλασιάζοντας και την τελευταία ισότητα αριστερά επί  $A$  και αντικαθιστώντας από την (7.1) έχουμε

$$A^k \mathbf{x} = \lambda^{k-1}(A\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k \mathbf{x}.$$

Συνεπώς, με τη μέθοδο της επαγωγής, για κάθε  $k$  φυσικό αριθμό, διαπιστώνουμε το ζητούμενο. ♦♦♦

**Παράδειγμα 7.3** Έστω  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ . Ένας τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας του

πίνακα  $B = A^3 - 4A^2 + 2I$ , χωρίς τον αλγεβρικό υπολογισμό του  $B$ , απαιτεί τη γνώση των ιδιοτιμών του (Πρόταση 7.1). Ο πίνακας  $A$  έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5) - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι  $\lambda_1 = 1$  και  $\lambda_2 = 6$ .

Αν  $\lambda$ ,  $\mathbf{x}$  τα ιδιοποσά του  $A$ , τότε σύμφωνα με την Πρόταση 7.3 παίρνουμε

$$B\mathbf{x} = (A^3 - 4A^2 + 2I)\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x} - 4\lambda^2\mathbf{x} + 2\mathbf{x} = (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2)\mathbf{x},$$

δηλαδή, τα ιδιοποσά του πίνακα  $B$  είναι  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2$ ,  $\mathbf{x}$ , (Ορισμός 7.1).

Για  $\lambda_1 = 1$ , η πρώτη ιδιοτιμή του  $B$  είναι  $\lambda_1(B) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 = -1$ , και για  $\lambda_2 = 6$ , η

δεύτερη ιδιοτιμή του  $B$  είναι  $\lambda_2(B) = 6^3 - 4 \cdot 6^2 + 2 = 74$ .

Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 7.1 αντικαθιστώντας στην (7.6), έχουμε

$$\det B = \lambda_1(B) \cdot \lambda_2(B) = -74. \quad \text{♦♦♦}$$

### Πόρισμα 7.3

Αν  $\lambda$ ,  $\mathbf{x}$  είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , τότε  $\lambda^{-k}$  και  $\mathbf{x}$  είναι τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα  $A^{-k}$ , όπου  $k \in \mathbb{N}$ .

**Απόδειξη :** Επειδή ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος, ισχύει  $A^{-1}A = I$  και επιπλέον όλες οι ιδιοτιμές είναι  $\lambda \neq 0$ , (Πόρισμα 7.1). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.1),  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , έχουμε

$$\lambda^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}(I\mathbf{x}) = \lambda^{-1}(A^{-1}A)\mathbf{x} = \lambda^{-1}A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}(\lambda^{-1}\lambda\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}, \quad (7.10)$$

συνεπώς, για  $k = 1$  αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Επίσης, συνδυάζοντας τη σχέση (7.10) με την Πρόταση 7.3, για κάθε φυσικό αριθμό  $k$ , μπορούμε να γράψουμε,

$$A^{-k} \mathbf{x} = (A^{-1})^k \mathbf{x} = (A^k)^{-1} \mathbf{x} = (\lambda^k)^{-1} \mathbf{x} = \lambda^{-k} \mathbf{x}. \quad \blacklozenge \blacklozenge \blacklozenge$$

Για παράδειγμα, όταν χρειάζεται να ελέγξουμε αν ο Ερμιτιανός<sup>1</sup> πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος ή όταν αναζητούμε τις ιδιοτιμές του  $A^{-2}$  και του πίνακα  $A^3$ , απαιτείται ο υπολογισμός των ιδιοτιμών του  $A$ .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 - 2i \\ -2 + 2i & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5).$$

Οι ρίζες του  $\chi_A(\lambda)$  είναι οι ιδιοτιμές του  $A$ , συνεπώς  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 5$ .

Άρα, ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται, επειδή το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή (Πόρισμα 7.1).

Ο πίνακας  $A^{-2}$  έχει ιδιοτιμές :  $\lambda_1^{-2} = (-1)^{-2} = 1$  και  $\lambda_2^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$  (Πόρισμα 7.3).

Τέλος ο πίνακας  $A^3$  έχει ιδιοτιμές :  $\lambda_1^3 = (-1)^3 = -1$  και  $\lambda_2^3 = 5^3 = 125$  (Πρόταση 7.3).

Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.?, οι πίνακες  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  είναι όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $P \in M_n(\mathbb{F})$  τέτοιος ώστε  $B = P^{-1}AP$ . Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται η σχέση ανάμεσα στα χαρακτηριστικά ποσά δύο ομοίων πινάκων.

#### Πρόταση 7.4

Οι όμοιοι πίνακες  $A \in M_n(\mathbb{F})$  και  $B = P^{-1}AP$  έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αν  $\lambda$ ,  $\mathbf{x}$  είναι τα χαρακτηριστικά ποσά του  $A$ , τότε  $\lambda$  και  $P^{-1}\mathbf{x}$  είναι τα ιδιοποσά του  $B$ .

**Απόδειξη :** Εφαρμόζοντας την ιδιότητα των οριζουσών,  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ , (Πρόταση 2.3 (ii)) και τον Ορισμό 2.1 (c) καταλήγουμε στην ισότητα

$$1 = \det I = \det(P^{-1}P) = \det(P^{-1}) \cdot \det P.$$

<sup>1</sup> Ισχύει  $A = A^*$ , βλέπε Ορισμό 1.2.

Αξιοποιώντας την προηγούμενη ισότητα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $B$  ταυτίζεται με του  $A$ , επειδή μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det(\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det P = \det(P^{-1}P)\det(\lambda I - A) \\ &= \det(\lambda I - A) = \chi_A(\lambda).\end{aligned}$$

Συνεπώς, οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, άρα, τις ίδιες ιδιοτιμές.

Ας υποθέσουμε ότι,  $\lambda$  είναι ιδιοτιμή του  $A$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{x}$ , άρα ισχύει  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  (Ορισμός 7.1). Πολλαπλασιάζοντας αριστερά επί  $P^{-1}$  την προηγούμενη ισότητα προκύπτει

$$P^{-1}A\mathbf{x} = \lambda P^{-1}\mathbf{x}. \quad (7.11)$$

Πολλαπλασιάζοντας δεξιά τη σχέση ομοιότητας,  $B = P^{-1}AP$ , επί  $P^{-1}\mathbf{x}$  και σε συνδυασμό με την (7.11) καταλήγουμε στο ζητούμενο, διότι

$$BP^{-1}\mathbf{x} = (P^{-1}AP)P^{-1}\mathbf{x} = P^{-1}A(PP^{-1})\mathbf{x} = P^{-1}(A\mathbf{x}) = \lambda P^{-1}\mathbf{x},$$

άρα,  $B(P^{-1}\mathbf{x}) = \lambda(P^{-1}\mathbf{x})$ . ◆◆◆

### Πρόταση 7.5

Αν  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$  είναι ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  του  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , τότε αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

**Απόδειξη :** Αν τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$  είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε υπάρχει κάποιος δείκτης  $m < r$  τέτοιος ώστε το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{x}_{m+1}$  να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων (Πρόταση 4.8), δηλαδή, υπάρχουν κατάλληλοι συντελεστές τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_m\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_{m+1}. \quad (7.12)$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1 έχουμε

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i, \text{ με } \mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, r. \quad (7.13)$$

Πολλαπλασιάζοντας αριστερά επί  $A$  την (7.12) και συνδυάζοντάς τη με την (7.13) παίρνουμε

$$\begin{aligned}a_1A\mathbf{x}_1 + a_2A\mathbf{x}_2 + \dots + a_mA\mathbf{x}_m &= A\mathbf{x}_{m+1} \\ a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_m\lambda_m\mathbf{x}_m &= \lambda_{m+1}\mathbf{x}_{m+1}\end{aligned} \quad (7.14)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (7.12) επί  $\lambda_{m+1}$  και αφαιρώντας την από την (7.14) καταλήγουμε

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{m+1})\mathbf{x}_2 + \dots + a_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})\mathbf{x}_m = \mathbf{0}.$$

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές  $a_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = a_2(\lambda_2 - \lambda_{m+1}) = \dots = a_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0$ . Από την υπόθεση έχουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, άρα  $\lambda_{m+1} \neq \lambda_i$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, m$ . Επομένως οι συντελεστές  $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$ . Αντικαθιστώντας αυτούς τους συντελεστές στην (7.12), συμπεραίνουμε ότι,  $\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{0}$ , το οποίο είναι αδύνατο, διότι σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1, ιδιοδιανύσματα θεωρούνται τα μη μηδενικά διανύσματα. Επομένως, δεν μπορεί τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$  να είναι γραμμικά εξαρτημένα, πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. ◆◆◆

#### Πρόταση 7.6

*Οι ιδιοτιμές Ερμιτιανού (ή συμμετρικού) πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.*

**Απόδειξη :** Έστω ότι ο Ερμιτιανός πίνακας

$$A = A^* \tag{7.15}$$

έχει το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  ως ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda$ , δηλαδή ισχύει η (7.1),  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .

Εφαρμόζοντας αναστροφосуζυγία στην (7.1) έχουμε

$$\mathbf{x}^* A^* = (A\mathbf{x})^* = \bar{\lambda} \mathbf{x}^*. \tag{7.16}$$

Στην (7.16) αντικαθιστούμε την (7.15) και στη συνέχεια την πολλαπλασιάζουμε δεξιά επί  $\mathbf{x}$ , οπότε καταλήγουμε

$$\mathbf{x}^* (A\mathbf{x}) = \bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x}^* \lambda \mathbf{x} = \bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{x} \Leftrightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \mathbf{x}^* \mathbf{x} = 0.$$

Επειδή το διάνυσμα  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , η τελευταία ισότητα δίνει  $\lambda = \bar{\lambda}$ , δηλαδή,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Θεωρούμε μία επιπλέον ιδιοτιμή  $\mu \neq \lambda$  του  $A$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ , οπότε

$$A\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}. \tag{7.17}$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας τις (7.15), (7.16) και (7.17), με το προηγούμενο αποτέλεσμα,  $\lambda = \bar{\lambda}$ , οδηγούμαστε στην επόμενη ισότητα

$$0 = \mathbf{x}^* (A^* - A) \mathbf{y} = \mathbf{x}^* A^* \mathbf{y} - \mathbf{x}^* A \mathbf{y} = \bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{y} - \mu \mathbf{x}^* \mathbf{y} = (\lambda - \mu) \mathbf{x}^* \mathbf{y}.$$

Επειδή υποθέσαμε  $\mu \neq \lambda$ , και  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ , είναι φανερό ότι, το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν, άρα, τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  είναι κάθετα. ◆◆◆

### Πρόταση 7.7

*Οι ιδιοτιμές αντιερμιτιανού (ή αντισυμμετρικού) πίνακα είναι φανταστικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.*

**Απόδειξη :** Έστω ότι για τον αντιερμιτιανό πίνακα

$$-A = A^* \tag{7.18}$$

ισχύει η (7.1), δηλαδή,  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Η αναστροφосуζυγία της (7.1) και η (7.18) δίνουν την ισότητα

$$-\mathbf{x}^* A = \bar{\lambda} \mathbf{x}^*. \tag{7.19}$$

Πολλαπλασιάζουμε δεξιά επί  $\mathbf{x}$  την (7.19), οπότε καταλήγουμε στην

$$-\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = \bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{x} \Leftrightarrow -\mathbf{x}^* \lambda \mathbf{x} = \bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{x} \Leftrightarrow (\lambda + \bar{\lambda}) \mathbf{x}^* \mathbf{x} = 0.$$

Επειδή το διάνυσμα  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , η τελευταία ισότητα δίνει  $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ , δηλαδή, ο πίνακας  $A$  έχει φανταστικούς αριθμούς ως ιδιοτιμές.

Θεωρούμε μια επιπλέον ιδιοτιμή  $\mu \neq \lambda$  του  $A$ , όπως στην (7.17).

Συνδυάζοντας τις (7.18), (7.19) και (7.17) έχουμε

$$0 = \mathbf{x}^* (A^* + A) \mathbf{y} = -\mathbf{x}^* A \mathbf{y} + \mathbf{x}^* A \mathbf{y} = \bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{y} + \mu \mathbf{x}^* \mathbf{y} = (\bar{\lambda} + \mu) \mathbf{x}^* \mathbf{y}. \tag{7.20}$$

Από το πρώτο στάδιο της απόδειξης, οι ιδιοτιμές είναι φανταστικοί αριθμοί, οπότε  $\mu \neq \lambda = -\bar{\lambda} \Rightarrow \mu + \bar{\lambda} \neq 0$ , ακόμη τα  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ , επομένως από την (7.20) έχουμε  $\mathbf{x}^* \mathbf{y} = 0$ , άρα, τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  είναι κάθετα. ◆◆◆

**Παράδειγμα 7.4** Ο πραγματικός πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  είναι αντισυμμετρικός,

(επειδή ισχύει  $-A = A^t$ ). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι ένα πολυώνυμο

τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές<sup>1</sup>, οπότε έχει τρεις ρίζες<sup>2</sup> και σύμφωνα με την Πρόταση 7.7 πρέπει να είναι φανταστικοί αριθμοί. Συνεπώς, οι δύο ιδιοτιμές του  $A$  θα έχουν συζυγείς τιμές και η τρίτη είναι το μηδέν. Πράγματι, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ -1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + 9\lambda = \lambda(\lambda + 3i)(\lambda - 3i) = 0.$$

Άρα, ο πίνακας  $A$  έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 3i$ ,  $\lambda_2 = -3i$  και  $\lambda_3 = 0$ , οπότε τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο μεταξύ τους κάθετα (Πρόταση 7.7).

• Για  $\lambda_1 = 3i$ , το ιδιοδιάνυσμα υπολογίζεται από τη λύση του ομογενούς συστήματος που προκύπτει από την (7.2), συγκεκριμένα από

$$(A - 3iI)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3i & 2 & -1 \\ -2 & -3i & 2 \\ 1 & -2 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Στον πίνακα του συστήματος κάνοντας τις γραμμοπράξεις  $r_3 \leftrightarrow r_1$ ,  $r_2 \rightarrow 2r_1 + r_2$ ,

$$r_3 \rightarrow 3ir_1 + r_3, \text{ βρίσκουμε } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3i \\ 0 & -4-3i & 2-6i \\ 0 & 2-6i & 8 \end{pmatrix} \text{ και συνεχίζοντας με } r_2 \leftrightarrow r_3,$$

$r_2 \rightarrow \frac{1}{2-6i}r_2$ ,  $r_3 \rightarrow \frac{1}{-4-3i}r_3$ ,  $r_3 \rightarrow -r_2 + r_3$  καταλήγουμε στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3i \\ 0 & 1 & \frac{8}{2-6i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο ιδιόχωρος υπολογίζεται από τη λύση του συστήματος

<sup>1</sup> Θεώρημα άλγεβρας : «Μια πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές αν έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό  $z_0$ , τότε έχει ρίζα και το συζυγή του  $\bar{z}_0$ ».

<sup>2</sup> Θεμελιώδες θεώρημα άλγεβρας : «Ένα πολυώνυμο  $n$  βαθμού έχει ακριβώς  $n$  το πλήθος ρίζες στο  $\mathbb{C}$ ».

$$\left. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3ix_3 = 0 \\ x_2 + \frac{8}{2-6i}x_3 = 0 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{cases} x_1 = \frac{1+3i}{1-3i}x_3 \\ x_2 = -\frac{4}{1-3i}x_3 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} (1+3i)/(1-3i) \\ -4/(1-3i) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{C} .$$

Συνεπώς, ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι  $V(3i) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1+3i & -4 & 1 \\ 1-3i & 1-3i & 1 \end{pmatrix}^t : x_3 \in \mathbb{C} \right\}$ .

Μπορούμε να επιλέξουμε ως ένα ιδιοδιάνυσμα, αντίστοιχο της  $\lambda_1 = 3i$  το διάνυσμα

$$\mathbf{x}_1 = (1+3i \quad -4 \quad 1-3i)^t, \text{ το οποίο βρίσκουμε για } x_3 = 1-3i.$$

• Όμοια υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην  $\lambda_2 = -3i$  και είναι το  $\mathbf{x}_2 = (1-3i \quad -4 \quad 1+3i)^t$ .

• Τέλος, για  $\lambda_3 = 0$ , από  $A\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ , προκύπτει το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Στον πίνακα του συστήματος εφαρμόζουμε τις γραμμοπράξεις  $r_3 \leftrightarrow r_1$ ,  $r_2 \rightarrow 2r_1 + r_2$ ,

$$r_3 \rightarrow \frac{1}{2}r_2 + r_3 \text{ και καταλήγουμε στον πίνακα } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο ιδιόχωρος  $V(0)$  προκύπτει από τη λύση του συστήματος

$$\left. \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases} \right\},$$

η οποία είναι όλα τα διανύσματα του συνόλου  $V(0) = \{(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t = x_2(2 \quad 1 \quad 2)^t : x_2 \in \mathbb{R}\}$ . Μπορούμε να επιλέξουμε ως ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της  $\lambda_3 = 0$  το διάνυσμα  $\mathbf{x}_3 = (2 \quad 1 \quad 2)^t$ , το οποίο βρίσκουμε για  $x_2 = 1$ .

Η καθετότητα των ιδιοχώρων αποδεικνύεται από τα εσωτερικά γινόμενα, για τα οποία ισχύει  $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 \rangle = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = 0$ , και έτσι επαληθεύεται η Πρόταση 7.7.

◆◆◆

Ο πραγματικός αντισυμμετρικός  $3 \times 3$  πίνακας  $A$  του Παραδείγματος 7.4 δεν είναι αντιστρέψιμος, επειδή, εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.1 ή το Πόρισμα 7.1, έχουμε  $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$ , και γενικά μπορούμε να έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

#### Πόρισμα 7.4

Κάθε πραγματικός αντισυμμετρικός πίνακας τύπου  $(2n+1) \times (2n+1)$  έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή και **δεν** είναι αντιστρέψιμος.

#### Πρόταση 7.8

Οι ιδιοτιμές ορθομοναδιαίου<sup>1</sup> (ή ορθογωνίου<sup>2</sup>) πίνακα έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα και τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.

**Απόδειξη :** Έστω ένας ορθομοναδιαίος πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$ ,

$$A^*A = AA^* = I \quad (7.21)$$

για τον οποίο ισχύει η (7.1),  $Ax = \lambda x$ . Εφαρμόζοντας αναστροφολογία στην (7.1) έχουμε

$$x^*A^* = (Ax)^* = \bar{\lambda}x^* \quad (7.22)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (7.22) δεξιά επί  $Ax$  και αντικαθιστούμε σε αυτήν την (7.21), οπότε προκύπτει

$$x^*A^*Ax = \bar{\lambda}x^*(Ax) \Leftrightarrow x^*Ix = \bar{\lambda}x^*\lambda x \Leftrightarrow (1 - \lambda\bar{\lambda})x^*x = 0.$$

Επειδή το διάνυσμα  $x \neq \mathbf{0}$ , από την τελευταία ισότητα παίρνουμε  $\lambda\bar{\lambda} = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$ .

Θεωρούμε μια επιπλέον ιδιοτιμή  $\mu \neq \lambda$  του  $A$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $y \neq \mathbf{0}$ , οπότε ισχύει η (7.17), δηλαδή  $Ay = \mu y$ .

Συνδυάζοντας τις (7.21), (7.22) και (7.17) καταλήγουμε στην ισότητα

$$0 = x^*(I - A^*A)y = x^*y - \bar{\lambda}x^*(Ay) = x^*y - \bar{\lambda}x^*\mu y = (1 - \bar{\lambda}\mu)x^*y. \quad (7.23)$$

Αν θεωρήσουμε ότι ισχύει  $1 - \bar{\lambda}\mu = 0$ , πολλαπλασιάζοντας επί  $\lambda$ , επειδή  $|\lambda| = 1$ , προκύπτει

$$\lambda = \lambda\bar{\lambda}\mu \Leftrightarrow \lambda = |\lambda|^2\mu \Leftrightarrow \lambda = \mu,$$

<sup>1</sup> Ένας πίνακας  $U \in M_n(\square)$  λέγεται **ορθομοναδιαίος** (unitary), όταν ισχύει  $UU^* = U^*U = I$

<sup>2</sup> Ένας **ορθογώνιος** πίνακας είναι ορθομοναδιαίος πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, άρα ισχύει  $UU^t = U^tU = I$ .

το οποίο είναι αδύνατο, επειδή υποθέσαμε  $\mu \neq \lambda$ . Επομένως, στην (7.23) απομένει  $\mathbf{x}^* \mathbf{y} = 0$ , που σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  είναι κάθετα. ♦♦♦

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ονομάζεται **κανονικός πίνακας** (normal matrix) αν ισχύει

$$AA^* = A^*A. \quad (7.24)$$

Από την (7.24) είναι φανερό ότι, ο πίνακας  $A$  είναι κανονικός αν και μόνο αν ο πίνακας  $A^*$  είναι κανονικός. Συνδυάζοντας τους ορισμούς των Ερμιτιανών, συμμετρικών, αντιερμιτιανών, αντισυμμετρικών, ορθομοναδιαίων και ορθογωνίων πινάκων με την (7.24), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όλες αυτές οι κατηγορίες πινάκων είναι πίνακες κανονικοί.

### Πρόταση 7.9

Για κάθε κανονικό πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad A^*\mathbf{x} = \bar{\lambda}\mathbf{x},$$

δηλαδή, οι κανονικοί πίνακες  $A$  και  $A^*$  έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα σε συζυγείς ιδιοτιμές.

Επιπλέον, αν  $\lambda = a + ib$  είναι μία ιδιοτιμή του  $A$ , τότε

$$a \in \sigma\left(\frac{A+A^*}{2}\right) \quad \text{και} \quad b \in \sigma\left(\frac{A-A^*}{2i}\right)$$

**Απόδειξη :** Έστω  $A$  κανονικός πίνακας, τότε ο  $A - \lambda I$  είναι επίσης κανονικός, διότι

εφαρμόζοντας τις ιδιότητες (ii) και (iii) της Πρότασης 1.2, κάνοντας πράξεις, καταλήγουμε

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^*(A - \lambda I) &= (A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I) = A^*A - \lambda A^* - \bar{\lambda}A + \bar{\lambda}\lambda I \\ &= AA^* - \bar{\lambda}A - \lambda A^* + \lambda\bar{\lambda}I = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^*. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Επιπλέον, από τον ορισμό του μέτρου διανύσματος (κεφάλαιο 5), από την (7.25) και την ιδιότητα (vi) της Πρότασης 1.3, έχουμε

$$\begin{aligned}\|(A - \lambda I)\mathbf{x}\|^2 &= ((A - \lambda I)\mathbf{x})^* (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{x}^* (A - \lambda I)^* (A - \lambda I)\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^* (A - \lambda I)(A - \lambda I)^* \mathbf{x} = ((A - \lambda I)^* \mathbf{x})^* (A - \lambda I)^* \mathbf{x} \\ &= \|(A - \lambda I)^* \mathbf{x}\|^2.\end{aligned}$$

Αν  $\lambda$  είναι μία ιδιοτιμή του  $A$  και  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, από την (7.2) ισχύει  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , οπότε η παραπάνω ισότητα των μέτρων γράφεται

$$\|(A - \lambda I)^* \mathbf{x}\| = \|(A - \lambda I)\mathbf{x}\| = 0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι,  $(A - \lambda I)^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A^* \mathbf{x} = \bar{\lambda} \mathbf{x}$ .

Για το δεύτερο μέρος της απόδειξης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι πίνακες  $\frac{1}{2}(A + A^*)$  και  $\frac{1}{2i}(A - A^*)$  είναι Ερμιτιανοί. Κατόπιν κάνουμε πράξεις και αντικαθιστούμε τα διανύσματα  $A\mathbf{x}$ ,  $A^* \mathbf{x}$  και την ιδιοτιμή  $\lambda = a + ib \in \sigma(A)$ , οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(A + A^*)\mathbf{x} &= \frac{1}{2}A\mathbf{x} + \frac{1}{2}A^* \mathbf{x} = \frac{1}{2}\lambda \mathbf{x} + \frac{1}{2}\bar{\lambda} \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})\mathbf{x} = a\mathbf{x}, \\ \frac{1}{2i}(A - A^*)\mathbf{x} &= \frac{1}{2i}\lambda \mathbf{x} - \frac{1}{2i}\bar{\lambda} \mathbf{x} = \frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda})\mathbf{x} = b\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Επειδή, οι Ερμιτιανοί πίνακες έχουν πραγματικές ιδιοτιμές (Πρόταση 7.6), από τις δύο προηγούμενες ισότητες συμπεραίνουμε ότι, οι πραγματικοί αριθμοί  $a$  και  $b$  είναι ιδιοτιμές των Ερμιτιανών πινάκων  $\frac{1}{2}(A + A^*)$  και  $\frac{1}{2i}(A - A^*)$ , αντίστοιχα.

◆◆◆

### 7.3 Θεώρημα Cayley-Hamilton

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  και ένα πολυώνυμο βαθμού  $k$  με συντελεστές από το  $\mathbb{F}$ ,

$$p(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0, \text{ με } a_k \neq 0.$$

Σύμφωνα με τις πράξεις των πινάκων μπορεί να οριστεί ο πίνακας

$$p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I \quad (7.26)$$

που ονομάζεται **πολυωνυμικός πίνακας** του  $A$  ή **πολυώνυμο του πίνακα**  $A$ .

Για παράδειγμα, αν  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  και  $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$ , επειδή  $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$ ,

ο πολυωνυμικός πίνακας του  $A$  είναι

$$p(A) = A^2 - 3A - 4I = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 4I = \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Επειδή κάθε τετραγωνικός πίνακας αντιμετατίθεται με τον εαυτό του, οι γνωστές πράξεις των πολυωνύμων και οι ιδιότητές τους μεταφέρονται και στους πολυωνυμικούς πίνακες του ίδιου πίνακα. Ας θεωρήσουμε τα πολυώνυμα  $p(\lambda)$  και  $g(\lambda)$ , οι πράξεις των πολυωνύμων ορίζονται να είναι :

$$\begin{aligned} p(\lambda) + g(\lambda) &= f(\lambda), & p(\lambda) \cdot g(\lambda) &= h(\lambda), \\ p(\lambda) &= g(\lambda) \cdot \pi(\lambda) + \nu(\lambda), & \text{με βαθμό } \nu(\lambda) &< \text{βαθμό } g(\lambda). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Για τον πολυωνυμικό πίνακα του  $A$  ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις

$$\begin{aligned} p(A) + g(A) &= f(A), & p(A) \cdot g(A) &= h(A), \\ p(A) &= g(A) \cdot \pi(A) + \nu(A), & \text{με δύναμη } \nu(A) &< \text{δύναμη } g(A). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Για ένα πολυώνυμο  $p(\lambda)$  λέμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  είναι **ρίζα** του αντίστοιχου πολυωνυμικού πίνακα, αν ισχύει  $p(A) = \mathbb{O}$ .

Το γνωστό θεώρημα της άλγεβρας<sup>1</sup> δεν ισχύει για έναν πολυωνυμικό πίνακα.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3),$$

το οποίο έχει ρίζες  $-3$  και  $1$ , σύμφωνα με την αντιστοιχία που υπάρχει ανάμεσα στα πολυώνυμα και στους πολυωνυμικούς πίνακες, οι πίνακες  $-3I$ ,  $I$  είναι ρίζες του αντίστοιχου πολυωνυμικού πίνακα. Πράγματι, ισχύει

$$p_1(-3I) = (-3I)^2 + 2(-3I) - 3I = \mathbb{O}, \quad \text{και} \quad p_1(I) = I^2 + 2I - 3I = \mathbb{O}.$$

Επίσης μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δεν είναι μόνο αυτές οι ρίζες του πολυωνυμικού πίνακα, επειδή κάνοντας αντικατάσταση με τον πίνακα  $X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ ,

$z \in \mathbb{R}$ , παίρνουμε

$$p_1(X) = X^2 + 2X - 3I = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -2z & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} - 3I = \mathbb{O}.$$

Συνεπώς, ο πίνακας  $X$  είναι άλλη μία ρίζα του πολυωνυμικού πίνακα.

<sup>1</sup> Θεμελιώδες θεώρημα : «Κάθε πολυώνυμο  $k$ -οστού βαθμού έχει  $k$  ρίζες στο  $\mathbb{C}$ ».

Συχνά τίθεται το ερώτημα, για δοθέντα πίνακα  $A$ , «αν υπάρχει πολυωνμικός πίνακας που έχει ως ρίζα τον πίνακα  $A$ », και όταν η απάντηση είναι καταφατική, τίθεται ακόμη το ερώτημα «ποια είναι τα πολυώνυμα που έχουν αυτή την ιδιότητα»;

**Παράδειγμα 7.5** Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  και το πολυώνυμο

$p_1(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ . Οι ρίζες του είναι  $-1, 5$ . Επομένως, οι πίνακες  $-I, 5I$  είναι ρίζες του πολυωνμικού πίνακα, (να επαληθεύσετε ότι ισχύουν οι ισότητες  $p_1(-I) = \mathbb{O}$  και  $p_1(5I) = \mathbb{O}$ ). Επιπλέον, ο πίνακας  $A$  είναι ρίζα του αντίστοιχου πολυωνμικού πίνακα, επειδή

$$p_1(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I = \begin{pmatrix} 41 & 42 & 42 \\ 42 & 41 & 42 \\ 42 & 42 & 41 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 5I = \mathbb{O}.$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο  $p_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$ , ο ίδιος πίνακας  $A$  είναι ρίζα του αντίστοιχου πολυωνμικού πίνακα, διότι ισχύει

$$p_2(A) = A^2 - 4A - 5I = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 5I = \mathbb{O}. \quad \blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$$

Επομένως, υπάρχει πολυώνυμο για το οποίο ο πίνακας  $A$  είναι ρίζα του αντίστοιχου πολυωνμικού πίνακα και μάλιστα υπάρχουν περισσότερα από ένα πολυώνυμα που ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα.

Όπως διατυπώνεται και αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα, αυτό ισχύει πάντοτε για ένα γνωστό και σημαντικό πολυώνυμο, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ . Για το Παράδειγμα 7.5, εύκολα διαπιστώνεται ότι ισχύει  $p_1(\lambda) \equiv \chi_A(\lambda)$ . Επίσης, το ίδιο ισχύει και για ένα άλλο πολυώνυμο, που ονομάζεται ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$ , (ενότητα 7.4). Στο Παράδειγμα 7.5 ισχύει  $p_2(\lambda) \equiv m_A(\lambda)$ , όπου  $m_A(\lambda)$  συμβολίζει το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$ .

Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως θεώρημα των **Cayley-Hamilton**.

**Θεώρημα 7.1 ( Cayley-Hamilton )**

Για κάθε πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει

$$\chi_A(A) = \mathbb{O},$$

όπου  $\chi_A(\lambda)$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ , δηλαδή, ο πίνακας  $A$  επαληθεύει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

**Απόδειξη :** Έστω  $\lambda \in \mathbb{F}$  και  $B = \text{adj}(\lambda I - A)$  ο προσαρτημένος πίνακας του  $\lambda I - A$ .

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3, ο  $B$  έχει τη μορφή

$$B = \text{adj}(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{21}(\lambda) & \dots & p_{n1}(\lambda) \\ p_{12}(\lambda) & p_{22}(\lambda) & & p_{n2}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{1n}(\lambda) & p_{2n}(\lambda) & \dots & p_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

όπου  $p_{ij}(\lambda)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  είναι πολυώνυμα του  $\lambda$  βαθμού το πολύ  $n-1$ .

Επομένως, μπορούμε να διασπάσουμε τον πίνακα  $B$  και να τον γράψουμε στη μορφή

$$B = \text{adj}(\lambda I - A) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda + B_0, \quad (7.29)$$

όπου  $B_{n-1}, B_{n-2}, \dots, B_1, B_0 \in M_n(\mathbb{F})$ . Από την (7.5) για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ , ισχύει

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 2.3 (ii) ισχύει η ισότητα

$$(\lambda I - A) \cdot \text{adj}(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A) \cdot I_n \quad (7.30)$$

Αντικαθιστώντας στην (7.30) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και την (7.29) προκύπτει

$$(\lambda I - A) \cdot (B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda + B_0) = (\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0)I_n \quad (7.31)$$

Υπενθυμίζουμε ότι, δύο πολυώνυμα είναι ίσα, αν οι αντίστοιχοι ομοβάθμιοι συντελεστές τους είναι ίσοι, οπότε η ίδια συνθήκη ισχύει και για τους αντίστοιχους πολυωνυμικούς πίνακες. Συνεπώς, από την (7.31) καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
 B_{n-1} &= I \\
 B_{n-2} - AB_{n-1} &= b_{n-1}I \\
 B_{n-3} - AB_{n-2} &= b_{n-2}I \\
 &\vdots \\
 B_0 - AB_1 &= b_1I \\
 -AB_0 &= b_0I
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

Πολλαπλασιάζουμε αριστερά όλες τις ισότητες στην (7.32) ως εξής: την πρώτη επί  $A^n$ , τη δεύτερη επί  $A^{n-1}$ , ..., την προτελευταία επί  $A$  και την τελευταία επί  $I$ , κατόπιν προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει το ζητούμενο, δηλαδή,

$$\mathbb{O} = A^n + b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \dots + b_1A + b_0I \equiv \chi_A(A). \quad \blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$$

Το θεώρημα Cayley-Hamilton έχει αρκετές εφαρμογές τόσο στον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα, αν υπάρχει, όσο και στην απλοποίηση πολυωνυμικών πινάκων.

### Εφαρμογή 7.1

Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει :

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0} \left( A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + b_{n-2}A^{n-3} + \dots + b_1I \right), \tag{7.33}$$

όταν  $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0$  είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ .

**Απόδειξη :** Σύμφωνα με το Πρόσχημα 7.2, επειδή ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος, για το σταθερό όρο του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου,

$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0$ , ισχύει  $b_0 \neq 0$ . Επομένως, σύμφωνα με το

Θεώρημα 7.1-Cayley-Hamilton προκύπτει

$$\begin{aligned}
 A^n + b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \dots + b_1A + b_0I &= \mathbb{O} \Leftrightarrow \\
 \left( A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + b_{n-2}A^{n-3} + \dots + b_1I \right) A &= -b_0I \Leftrightarrow \\
 -\frac{1}{b_0} \left( A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + b_{n-2}A^{n-3} + \dots + b_1I \right) A &= I.
 \end{aligned}$$

Η προηγούμενη ισότητα επαληθεύει τη σχέση στην (1.3), αρκεί να θεωρήσουμε ως

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0} \left( A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + b_{n-2}A^{n-3} + \dots + b_1I \right). \quad \blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$$

Πολλές φορές, προκειμένου να υπολογίσουμε ή να απλοποιήσουμε έναν πολυωνυμικό πίνακα του  $A$ ,  $p(A)$ , ιδιαίτερα στην περίπτωση μεγάλου βαθμού πολυωνυμικού πίνακα, χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο του πολυώνυμο,  $p(\lambda)$ , το οποίο αναλύουμε όπως στην (7.27) και στη θέση του  $g(\lambda)$  θέτουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ . Κατόπιν, μετατρέπουμε την ισότητα σε πολυωνυμικό πίνακα του  $A$ , όπως στην (7.28) και εφαρμόζουμε το θεώρημα Cayley-Hamilton. Έτσι, καταλήγουμε

$$p(A) = \chi_A(A) \cdot \pi(A) + \nu(A) \Leftrightarrow p(A) = \mathbb{O} \cdot \pi(A) + \nu(A) = \nu(A),$$

δηλαδή,

$$p(A) = \nu(A). \quad (7.34)$$

Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου  $\nu(\lambda)$  είναι μικρότερος από το βαθμό του  $\chi_A(\lambda)$ , είναι φανερό ότι, ο πολυωνυμικός πίνακας,  $\nu(A)$ , του  $A$ , είναι αρκετά πιο απλοποιημένος και «εύχρηστος» σε σχέση με τον αρχικό.

**Παράδειγμα 7.6** Να υπολογισθεί ο πίνακας  $B = 3A^{2005} - 6A + I$ , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -3 & 0 & \lambda + 4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{pmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda. \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$p(\lambda) = 3\lambda^{2005} - 6\lambda + 1,$$

από την (7.27) υπάρχει πολυώνυμο  $\nu(\lambda)$ , τέτοιο ώστε

$$p(\lambda) = \chi_A(\lambda) \cdot \pi(\lambda) + \nu(\lambda), \quad \text{με } \nu(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c, \quad {}^1 \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  στην ισότητα

---

<sup>1</sup> Η μορφή του πολυωνύμου  $\nu(\lambda)$  εξαρτάται από τον περιορισμό: βαθμ.  $\nu(\lambda) <$  βαθμ.  $\chi_A(\lambda)$ .

$$3\lambda^{2005} - 6\lambda + 1 = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) \cdot \pi(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (7.35)$$

προσδιορίζουμε τους συντελεστές του  $\nu(\lambda)$ . Αντικαθιστώντας στην (7.35) διαδοχικά τις τιμές  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = -1$  και  $\lambda = -2$ , προκύπτει το σύστημα

$$c = 1, \quad a - b + c = 4, \quad 4a - 2b + c = -3 \cdot 2^{2005} + 13,$$

το οποίο έχει μοναδική λύση  $a = 3 - 3 \cdot 2^{2004}$ ,  $b = -3 \cdot 2^{2004}$  και  $c = 1$ .

Άρα

$$\nu(\lambda) = (3 - 3 \cdot 2^{2004})\lambda^2 - 3 \cdot 2^{2004}\lambda + 1.$$

Επομένως, από την (7.34) έχουμε

$$\begin{aligned} B = p(A) &= \nu(A) = (3 - 3 \cdot 2^{2004})A^2 - 3 \cdot 2^{2004}A + I \\ &= (3 - 3 \cdot 2^{2004}) \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 10 \end{pmatrix} - 3 \cdot 2^{2004} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} + I \\ &= \begin{pmatrix} 12 \cdot 2^{2004} - 14 & 0 & -12 \cdot 2^{2004} + 18 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 \cdot 2^{2004} - 27 & 0 & -18 \cdot 2^{2004} + 31 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◆◆◆

## 7.4 Ελάχιστο πολυώνυμο

Όπως έχουμε διαπιστώσει στο Παράδειγμα 7.5, εκτός από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, που ικανοποιεί την ισότητα  $\chi_A(A) = \mathbb{O}$ , υπάρχουν και άλλα πολυώνυμα που έχουν ρίζα τον πίνακα  $A$ .

### Ορισμός 7.4

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . **Ελάχιστο πολυώνυμο** του πίνακα  $A$  ονομάζεται το πολυώνυμο, που ικανοποιεί τις ιδιότητες :

- ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι μονάδα
- $m_A(A) = \mathbb{O}$
- είναι μικρότερου βαθμού ανάμεσα σε όλα τα πολυώνυμα που έχουν τις δύο προηγούμενες ιδιότητες.

Συμβολίζεται  $m_A(\lambda)$ .

Για να προσδιορίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα  $A$ , χρειάζεται να γνωρίζουμε και ορισμένες επιπλέον ιδιότητες που αυτό ικανοποιεί, οι οποίες περιγράφονται και αποδεικνύονται στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 7.10**

i) Το ελάχιστο πολυώνυμο  $m_A(\lambda)$  του πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι μοναδικό.

ii) Για το ελάχιστο πολυώνυμο  $m_A(\lambda)$  του  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει

$$\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda) \cdot \pi(\lambda),$$

όπου  $\pi(\lambda)$  είναι το πολυώνυμο που προκύπτει από τη διαίρεση του  $\chi_A(\lambda)$  με το  $m_A(\lambda)$ . Ισοδύναμα, το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$  διαιρεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

iii) Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ .

**Απόδειξη :** i) Έστω ότι εκτός από το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$ ,  $m_A(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ , υπάρχει και άλλο ένα πολυώνυμο,  $\mu(\lambda) = \lambda^k + d_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + d_1\lambda + d_0$ , τέτοιο ώστε  $\mu(A) = \mathbb{O}$ .

Τότε, για τον πολυωνυμικό πίνακα του  $A$ , που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο  $\nu(\lambda)$ , όπου

$$\nu(\lambda) = m_A(\lambda) - \mu(\lambda) = (c_{k-1} - d_{k-1})\lambda^{k-1} + (c_{k-2} - d_{k-2})\lambda^{k-2} + \dots + (c_1 - d_1)\lambda + c_0 - d_0,$$

ισχύει

$$\nu(A) = m_A(A) - \mu(A) = \mathbb{O}.$$

Επομένως, κατασκευάσαμε ένα τρίτο πολυώνυμο  $\nu(\lambda)$  που επαληθεύει τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 7.4 και είναι βαθμού  $k-1$ , δηλαδή μικρότερου βαθμού από αυτό που θεωρήσαμε ως ελάχιστο πολυώνυμο  $m_A(\lambda)$ , το οποίο είναι αδύνατο. Άρα, το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μοναδικό.

ii) Επειδή ο βαθμός του  $m_A(\lambda)$  είναι μικρότερος ή ίσος από το βαθμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, από την (7.27) υπάρχουν πολυώνυμα  $\pi(\lambda)$  και  $\nu(\lambda)$  τέτοια ώστε

$$\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda) \cdot \pi(\lambda) + \nu(\lambda), \text{ με βαθμό } \nu(\lambda) < \text{βαθμό } m_A(\lambda). \quad (7.36)$$

Από την (7.36) δημιουργούμε τους αντίστοιχους πολυωνμικούς πίνακες, στους οποίους αντικαθιστούμε  $\chi_A(A) = \mathbb{O}$  (Θεώρημα 7.1), και  $m_A(A) = \mathbb{O}$  (Ορισμός 7.4 (b)), οπότε συμπεραίνουμε ότι,

$$\chi_A(A) = m_A(A) \cdot \pi(A) + \nu(A) \Rightarrow \mathbb{O} = \mathbb{O} \cdot \pi(A) + \nu(A) \Rightarrow \mathbb{O} = \nu(A).$$

Επιπλέον, από την ανίσωση των βαθμών στην (7.36) και την υπόθεση ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι  $m_A(\lambda)$ , συμπεραίνουμε ότι,  $\nu(\lambda) = 0$ . Επομένως, η (7.36) γράφεται  $\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda) \cdot \pi(\lambda)$ , το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

iii) Από το (ii) είναι φανερό ότι, κάθε ρίζα του  $m_A(\lambda)$  είναι και ρίζα του  $\chi_A(\lambda)$ . Απομένει να αποδειχθεί το αντίστροφο, δηλαδή, αν  $\lambda_0 \in \sigma(A)$ , τότε  $\lambda_0$  είναι ρίζα του ελαχίστου πολυωνύμου  $m_A(\lambda)$ .

Υποθέτουμε ότι για τη συγκεκριμένη ιδιοτιμή  $\lambda_0$  ισχύει

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \cdot \pi(\lambda) + \nu, \text{ με } \nu \neq 0, \quad (7.37)$$

για κάποιο κατάλληλο πολυώνυμο  $\pi(\lambda)$ . Επειδή, πρέπει να ισχύει  $m_A(A) = \mathbb{O}$ , για τον αντίστοιχο πολυωνμικό πίνακα, από την (7.37) έχουμε

$$\mathbb{O} = m_A(A) = (A - \lambda_0 I) \cdot \pi(A) + \nu I,$$

και από την τελευταία ισότητα προκύπτει

$$(A - \lambda_0 I) \cdot \pi(A) = -\nu I \stackrel{\nu \neq 0}{\Leftrightarrow} (A - \lambda_0 I) \cdot \left( -\frac{\pi(A)}{\nu} \right) = I.$$

Επειδή υποθέσαμε  $\lambda_0 \in \sigma(A) \Rightarrow \det(A - \lambda_0 I) = 0$ , αν θεωρήσουμε τις ορίζουσες των πινάκων της τελευταίας ισότητας, προκύπτει  $0 = 1$ , το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως, πρέπει να ισχύει  $\nu = 0$ . Άρα, η ισότητα στην (7.37) γράφεται

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \cdot \pi(\lambda),$$

από όπου είναι φανερό ότι,  $\lambda_0$  είναι ρίζα του  $m_A(\lambda)$ . ◆◆◆

Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο  $p_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$  του Παραδείγματος 7.5, εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 7.4, άρα αυτό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα  $A$ ,  $p_2(\lambda) \equiv m_A(\lambda)$ . Επιπλέον, μπορούμε να επαληθεύσουμε την Πρόταση 7.10 (iii), διότι οι ρίζες  $-1, 5$

του  $m_A(\lambda)$  είναι ίδιες με του χαρακτηριστικού πολυώνυμου του  $A$   
 $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ , και διαφέρουν μόνο στην αλγεβρική  
πολλαπλότητα.

Από την τελευταία παρατήρηση και την Πρόταση 7.10 συμπεραίνουμε ότι :

**Πρόταση 7.11**

Αν για τον πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\nu_s},$$

τότε, το ελάχιστο πολυώνυμο είναι

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}, \text{ όπου } 1 \leq k_j \leq \nu_j, j = 1, 2, \dots, s.$$

Για παράδειγμα, αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα είναι το  
 $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 2)$ , τότε οι δυνατές περιπτώσεις για το ελάχιστο πολυώνυμο  
είναι  $m_1(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$  ή  $m_2(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 2)$ , διότι το ελάχιστο  
πολυώνυμο πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει ακριβώς τις  
ίδιες ρίζες με αυτό. Για να επιλέξουμε τελικά, ποιο από τα  $m_1(\lambda)$ ,  $m_2(\lambda)$  είναι το  
ελάχιστο πολυώνυμο, χρειάζεται να γνωρίζουμε τον πίνακα  $A$  και να εξετάσουμε αν  
ισχύει  $m_1(A) = \mathbb{O}$ , οπότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι  $m_1(\lambda)$ . Διαφορετικά, το  
ελάχιστο ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, μια και για το τελευταίο  
ισχύει το θεώρημα Cayley-Hamilton, το οποίο επαληθεύει την ιδιότητα (b) του  
Ορισμού 7.4.

**Παρατήρηση 7.3** Το ελάχιστο πολυώνυμο το αναζητούμε ανάμεσα στα πολυώνυμα  
που έχουν όλες τις ιδιοτιμές του  $A$  ως ρίζες, επαληθεύουν την ιδιότητα (b) του  
Ορισμού 7.4 και είναι ελαχίστου βαθμού, και γι' αυτό αρχίζουμε τον έλεγχο από τα  
πολυώνυμα μικρότερου βαθμού.

**Παράδειγμα 7.7** Έστω οι πίνακες  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Το

χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι  $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$ .

Το πολυώνυμο  $m_1(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$  έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και είναι μικρότερου βαθμού. Ελέγχοντας για την (b) συνθήκη του Ορισμού 7.4, διαπιστώνουμε ότι

$$m_1(A) = (A + I)(A - 3I) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}.$$

Επομένως, το ελάχιστο πολυώνυμο ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ ,  $m_A(\lambda) \equiv \chi_A(\lambda)$ , για το οποίο ισχύει  $\chi_A(A) = \mathbb{O}$  (Θεώρημα 7.1).

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $B$  είναι  $\chi_B(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$ . Σύμφωνα με τα προηγούμενα, υποψήφια ελάχιστα πολυώνυμα είναι τα  $m_1(\lambda) = \lambda - 2$ ,  $m_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2$  ή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Όμως,

$$m_1(B) = B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O},$$

$$m_2(B) = (B - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

Επομένως, το ελάχιστο πολυώνυμο του  $B$  είναι το

$$m_B(\lambda) \equiv m_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4. \quad \color{blue}{\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge}$$

Στην Πρόταση 7.11, αν  $\nu_j = 1$ , για κάθε  $j = 1, 2, \dots, s$ , προφανώς ισχύει  $k_j = 1$ , οπότε συμπεραίνουμε την ακόλουθη πρόταση.

### Πόρισμα 7.5

Αν ο πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A$ .