Κεφάλαιο 1

Σειρές Πραγματικών αριθμών

1.1 Ορισμοί

Ορισμός 1.1 *Έστω η ακολουθία* $\{a_n\}$, $n \geq 1$ *των πραγματικών αριθμών και* $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *η αντίστοιχη ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, την οποία ορίζουμε* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$. *Η ακολουθία* $\{S_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *ονομάζεται* **σειρά πραγματικών αριθμών**.

Αντί της ακολουθίας $\{S_n\}$, $n \geq 1$ χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \text{ή} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

Οι πραγματικοί αριθμοί a_n , $\forall\, n \in \mathbb{N}$ καλούνται **όροι** της σειράς και ειδικώτερα ο a_n ονομάζεται **γενικός όρος** ή **νιοστός όρος** της.

Αν όλοι οι όροι της σειράς είναι θετικοί(αρνητικοί) αριθμοί, τότε αυτή ονομάζεται **θετική** (**αρνητική**) σειρά, αν οι όροι της είναι εναλλάξ θετικός αρνητικός αυτή καλείται **εναλλάσσουσα**. Π.χ. από τις επόμενες σειρές

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 &= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + \ldots \\
\sum_{n=1}^{\infty} -4n - 1 &= (-5) + (-9) + \ldots + (-4n - 1) + \ldots \\
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} &= (-1) + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{3}) + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots \\
\sum_{n=1}^{\infty} \sin n &= \sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n + \ldots
\end{aligned}$$

η πρώτη είναι θετική, η δεύτερη αρνητική, η τρίτη εναλλάσσουσα και η τελευταία δεν ανήκει σε καμία κατηγορία.

Ορισμός 1.2 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** *προς τον πραγματικό αριθμό* s *(συμβ.* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$*) αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός* s *τέτοιος, ώστε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *να συγκλίνει σ' αυτόν, εν συντομία*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = s.$$

Ο πραγματικός αριθμός s *ονομάζεται* **άθροισμα** *της σειράς (1.1).*

Αν δεν υπάρχει το όριο ή το όριο είναι $\pm\infty$ τότε η σειρά (1.1) ονομάζεται **αποκλίνουσα**. Ειδικώτερα αν $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ ($\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$) λέγεται αποκλίνουσα στο $\infty\,(-\infty)$. Σε κάθε άλλη περίπτωση καλείται **ταλαντευόμενη** ή **αορίστως αποκλίνουσα**.

Παράδειγμα 1.1 *Η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$, $a\in\mathbb{R}$ *(γεωμετρική σειρά με πρώτον όρο το* a *και λόγο* x*)*

ι) *συγκλίνει για* $|x| < 1$, *με άθροισμα* $s = \dfrac{a}{1-x}$

ιι) *αποκλίνει στο* ∞, *για* $x \geq 1$ *και* $a > 0$ *(στο* $-\infty$, $a < 0$*)*

ιιι) *ταλαντεύεται για* $x \leq -1$.

Απόδειξη Για $x = 1$ το $S_n = a(n+1)$ συνεπώς $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.
Για $x \neq 1$ το μερικό άθροισμα είναι

$$S_n = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n = a\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Οπότε έχουμε:

ι) για $|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-x} - \dfrac{a}{1-x}\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \dfrac{a}{1-x}$

ιι) για $x > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-x} - \dfrac{a}{1-x}\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \infty$, όταν $a > 0$

ιιι) για $x = -1$ ισχύει $\begin{cases} S_{2n} \to a \\ S_{2n-1} \to 0, \end{cases}$

και όταν $a > 0$ με $x < -1$ έχουμε $\begin{cases} S_{2n} \to \infty \\ S_{2n-1} \to -\infty, \end{cases}$
συνεπώς για $x \leq -1$ η σειρά ταλαντεύεται, όπως ταλαντεύεται και η αντίστοιχη ακολουθία $\{x^n\}_{n\geq 1}$.

$\Diamond$

1.2 Προτάσεις σύγκλισης ή απόκλισης σειρών

Πρόταση 1.1 (Κριτήριο Cauchy) *Η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει αριθμός* $N(\varepsilon) > 0$ *τέτοιος, ώστε να ισχύει :* $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ *για κάθε ζεύγος* $m\,,n$ *με* $m \geq n > N(\varepsilon)$.

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε :

$$\forall \;\; \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; N(\varepsilon) > 0 \;\; : \;\; |S_m - S_n| < \varepsilon \;\; \forall\, m\,, n \in \mathbb{N} \;\text{ με }\; m \geq n > N(\varepsilon) \tag{1.2}$$

ή

$$\forall \;\; \varepsilon > 0 \;\text{ και }\; \rho \in \mathbb{N} \;\text{ με }\; n \geq N(\varepsilon) \;\text{ να έχουμε }\; : \;\; |S_{n+\rho} - S_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(S_{n+\rho} - S_n) = 0.$$

Παράδειγμα 1.2 *Η αρμονική σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη Αν η σειρά συγκλίνει, θα πρέπει να ισχύει η (1.2), οπότε για $m = 2n$ θα πρέπει να υπάρχει $N(\varepsilon)$ τέτοιο, ώστε

$$\forall \;\; \varepsilon > 0 \;\text{ και για κάθε }\; n > N(\varepsilon) \;\text{ έχουμε }\; : \;\; |S_{2n} - S_n| < \varepsilon \tag{1.3}$$

Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε :

$$S_{2n} - S_n \;=\; \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} \;=\; \frac{1}{2}\,,$$

δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|S_{2n} - S_n| \;\geq\; \frac{1}{2}$, και δεν ισχύει η (1.3). Άρα η σειρά αποκλίνει. $\Diamond$

Πρόταση 1.2 *Έστω η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *των πραγματικών αριθμών.*

ι) *Αν η* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε* $\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; 0$.

ιι) *Αν* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\,,$ *τότε η* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **δε** *συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.3 *Η* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n+7}$ *δε συγκλίνει, γιατί* $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+7} \;=\; \frac{3}{5} \neq 0.$

Το αντίστροφο της Πρότασης 1.2ι) δεν ισχύει.

Παρατήρηση 1.1 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *αποκλίνει στο* $+\infty$.

Για το όριο έχουμε $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$, αφού για το μερικό άθροισμα είναι

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

συνεπώς $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, και από Πρόταση 1.4ιι) $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. ◊

Πρόταση 1.3 *Έστω* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *σειρά* **μη αρνητικών όρων** *(*$a_n \geq 0$*).*

ι) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία* $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *είναι φραγμένη.*

ιι) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **δε** *συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία* $\{S_n\}_{n\geq 1}$ **δεν** *είναι φραγμένη.*

Πρόταση 1.4 *(Κριτήριο σύγκρισης)*

ι) *Αν* $|a_n| \leq \beta_n$ *για κάθε* $n \geq N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ *και* $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ *συγκλίνει, τότε και η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

ιι) *Αν* $a_n \geq \beta_n \geq 0$ *για κάθε* $n \geq N_0$, *και επί πλέον αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ *αποκλίνει προς το* $+\infty$, *τότε και η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει προς το* $+\infty$.

Παράδειγμα 1.4 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *συγκλίνει.* $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)$

Επειδή $n \geq 2 \Rightarrow n! \geq 2^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} \geq \frac{1}{n!}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ είναι γεωμετρική με $x = \frac{1}{2} < 1$ και σύμφωνα με το παράδειγμα 1.1 συγκλίνει $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$, οπότε από Πρόταση 1.4ι) και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. ◊

Παράδειγμα 1.5 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ *συγκλίνει.*

Επειδή για κάθε $n \geq 2$ ισχύει $n^n \geq 2^n$, καθώς επίσης η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ είναι γεωμετρική με $x = \frac{1}{2} < 1$ και συγκλίνει (παρ.1.1), οπότε (Πρ. 1.4ι)) και η δοθείσα συγκλίνει. $\diamondsuit$

Παράδειγμα 1.6 *Η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$ *αποκλίνει.*

Για κάθε $n \geq 1$, ισχύει $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\,(n+1)}} < \dfrac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$. Όμως, σύμφωνα με το παράδειγμα 1.2 η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, οπότε κατά το κριτήριο σύγκρισης Πρόταση 1.4ιι) και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$ αποκλίνει. $\diamondsuit$

Πρόταση 1.5 *Έστω οι συγκλίνουσες σειρές* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ *και* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. *Τότε*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda\, a_n + \kappa\, b_n = \lambda\, a + \kappa\, b, \quad \text{για κάθε } \lambda, \kappa \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 1.6 *Αν η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει και* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *αποκλίνει, τότε η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ *αποκλίνει.*

Εφαρμογή 1.1 Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n} \right)$ αποκλίνει. Θεώρησε τη συγκλίνουσα σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (παρ. 1.1) και την αποκλίνουσα σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (παρ. 1.2). $\diamondsuit$

Πρόταση 1.7 *Έστω* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *ακολουθία* **φθίνουσα μη αρνητικών αριθμών** *(δηλαδή,* $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$*). Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

ι) *η* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει προς πραγματικό αριθμό (αποκλίνει προς το* $+\infty$ *)*

ιι) *η* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\, a_{2^k}$ *συγκλίνει προς πραγματικό αριθμό (αποκλίνει προς το* $+\infty$ *).*

Παράδειγμα 1.7 *Για τη σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$ *(ονομάζεται* **αρμονική σειρά** ρ**-τάξης** *ή σειρά Dirichlet) έχουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho} = \begin{cases} \text{συγκλίνει} & \text{για} \quad \rho > 1, \\ \text{αποκλίνει στο } +\infty & \text{για} \quad \rho \leq 1. \end{cases}$$

Απόδειξη Για $\rho \le 0 \;\;\Rightarrow -\rho = k \ge 0$ έχουμε αφ' ενός $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\rho} = \lim\limits_{n\to\infty} n^k \ne 0$ και αφ' ετέρου η σειρά είναι σειρά θετικών όρων. Οπότε από Πρόταση 1.4ι) η σειρά δε συγκλίνει, αποκλίνει στο $+\infty$.
Για $\rho > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε ότι η $a_n = \dfrac{1}{n^\rho}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων και από την Πρόταση 1.7, αναγόμαστε στη μελέτη της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \, \frac{1}{(\,2^k\,)^{\rho}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\,2^{1-\rho}\,)^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

όπου $x \equiv 2^{1-\rho}$. Η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ είναι γεωμετρική σειρά και από παράδειγμα 1.1 συγκλίνει όταν $2^{1-\rho} < 1 \Longrightarrow \rho > 1$. Ενώ για $\rho \le 1 \Longrightarrow x \ge 1$, η γεωμετρική σειρά αποκλίνει προς το $+\infty$. ◊

Εφαρμογή 1.2 Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ συγκλίνει, αφού από Πρόταση 1.4ι), είναι σειρά θετικών όρων και ισχύει $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{n\,(n+1)} \le \dfrac{1}{n^2}$ η δε σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ είναι Dirichlet με $\rho = 2$, η οποία συγκλίνει σύμφωνα με το παράδειγμα 1.7. ◊

Πρόταση 1.8 *Έστω* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *και* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *σειρές* **μη αρνητικών όρων** *και* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k.$

ι) *Αν* $0 < k < \infty$ *και* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει* $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει.*

ιι) *Αν* $k = 0$ *και* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει* $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

ιιι) *Αν* $k = \infty$ *και* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει* $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει.*

Παράδειγμα 1.8 *Η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3n^4+5}$ *συγκλίνει.*

Ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες με γενικούς όρους $b_n = \dfrac{2n+1}{3n^4+5} \ge 0$ και $a_n = \dfrac{1}{n^3} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{3}{2}$, από παράδειγμα 1.7 με $\rho = 3$ η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, συνεπώς από Πρόταση 1.8ι) και η δοθείσα συγκλίνει. ◊

1.3 Απόλυτη σύγκλιση

Πρόταση 1.9 *Έστω η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Αν η* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *συγκλίνει, τότε και η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

Παράδειγμα 1.9 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ *συγκλίνει.*

Ο γενικός όρος είναι $a_n = \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε : $|a_n| = \left|\frac{\sin(n\theta)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$.
Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει και από Πρόταση 1.4ι) συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, οπότε από Πρόταση 1.9 και η δοθείσα σειρά συγκλίνει. $\Diamond$

Το αντίστροφο της Πρότασης 1.9 **δεν** ισχύει.

Παρατήρηση 1.2 *Έστω ο γενικός όρος* $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. *Η σειρά των απολύτων τιμών των όρων της, αποκλίνει στο* $+\infty$, *ενώ η* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ *συγκλίνει.*

Από Παρατήρηση 1.1 προφανώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει, ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, συγκλίνει σύμφωνα με το επόμενο παράδειγμα 1.10, θέτοντας $\rho = 1/2$. $\Diamond$

1.4 Εναλλάσσουσες σειρές

Η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι εναλλάσσουσα σειρά αν και μόνο αν $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 1.10 (Κριτήριο Leibniz) *Αν οι απόλυτες τιμές των όρων της εναλλάσσουσας σειράς αποτελούν φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, τότε η σειρά συγκλίνει, δηλαδή, αν για τη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *ισχύουν :* **ι)** *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *και* **ιι)** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *τότε αυτή συγκλίνει.*

Παράδειγμα 1.10 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\rho}$ *για* $\rho > 0$ *συγκλίνει,*

γιατί $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1/n^\rho}{1/(n+1)^\rho} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\rho \geq 1 \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\rho} = 0$, οπότε από Πρόταση 1.22 η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\rho}$ συγκλίνει.

Πρόταση 1.11 *(Κριτήριο ριζών του Cauchy) Έστω η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *έτσι ώστε* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ *(δηλαδή* $\mathbb{R}$ *ή* $+\infty$*). Τότε :*

ι) *Αν* $\lambda < 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|$ *συγκλίνει,*

ιι) *αν* $\lambda > 1$, *τότε η σειρά* **δε** *συγκλίνει (αποκλίνει),*

ιιι) *αν* $\lambda = 1$, *δεν μπορούμε ν' αποφανθούμε για τη σύγκλισή της.*

Παράδειγμα 1.11 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+2n-1}{3^n}$ *συγκλίνει.*

Αφού $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^3+2n-1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n^3+2n-1}}{3} = \dfrac{1}{3} \equiv \lambda < 1$ από Προτάσεις 1.11ι) και 1.9 η δοθείσα σειρά συγκλίνει. $\Diamond$

Πρόταση 1.12 *(Κριτήριο των λόγων του D' Alembert) Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *σειρά μη μηδενικών αριθμών με* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ *(δηλαδή* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ή* $\lambda = +\infty$*). Τότε :*

ι) *Αν* $\lambda < 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|$ *συγκλίνει,*

ιι) *αν* $\lambda > 1$, *τότε η σειρά αποκλίνει και* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

ιιι) *αν* $\lambda = 1$, *δεν μπορούμε ν' αποφανθούμε για τη σύγκλιση των σειρών* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|$.

Παράδειγμα 1.12 *Οι σειρές* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, *συγκλίνουν.*

Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\; n^n}{(n+1)^{n+1}\; n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} = \lambda < 1,$$ ά-ρα από Προτάσεις 1.12ι) και 1.9 η σειρά συγκλίνει.

Επίσης $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{x^{n+1}\; n!}{(n+1)!\; x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|}{n+1} = 0 \equiv \lambda < 1$, άρα η δοθείσα σειρά συγκλίνει. $\Diamond$

Πρόταση 1.13 *Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση* $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι θετική και φθίνουσα, τότε το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

και η σειρά

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

συγχρόνως συγκλίνουν ή αποκλίνουν. Στην περίπτωση σύγκλισης ισχύει

$$I \;<\; S \;< I + f(1).$$

Παράδειγμα 1.13 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2}$ *συγκλίνει, επειδή η συνάρτηση* $f(x) = \dfrac{1}{4x^2}$ *είναι θετική και φθίνουσα και επιπλέον ισχύει*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{4x^2}\,dx = -\,\frac{1}{4}\lim_{x \longrightarrow \infty}\left[\,\frac{1}{x}\,\right]_1^x = \frac{1}{4}.$$

$\Diamond$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α) Να εξετασθεί αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές:

0) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n+4}{3^n+16}$ 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5^n \cdot (n+1)!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+8n^2+8}{2n^4+10n+12}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sin(n\theta)}{2n^2+4n+3}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-6n}{2(n+1)!}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^3+8}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{2^n+16}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{(n+2)e^{n+1}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+8n+10}{2n^5+4n+2}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n+5}{3^n+4}$ 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,(2n+3)}{(n+2)\,(n+1)}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n}$ 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n-1}$ 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(n^2+1)}{3n^2+2}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n\pi\,\alpha)}{n^2+4}$ 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, n}{n^2+1}$ 17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+1}{3^n}$ 18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+8n}{4n^5}$

Β) Να βρείτε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

ι) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+8)^n}{8^n \cdot n^2}$ ιι) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x-2)^{n-1} \cdot (n-1)!}{6^n \cdot (n+2)!}$ ιιι) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 x^n}{n!}$

1.5 Προτάσεις σύγκλισης σειρών

Πρόταση 1.14 (Κριτήριο Cauchy) *Η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει,* **αν και μόνο αν**

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \, N(\varepsilon) > 0 \ : \ \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| = |S_m - S_n| < \varepsilon \quad \forall \, m \, , n \, \in \mathbb{N} \ \ \text{με} \ \ m \geq n > N(\varepsilon)$$

Πρόταση 1.15 *Έστω η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *των πραγματικών αριθμών.*

ι) *Αν η* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

ιι) *Αν* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *τότε η* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **δε** *συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$.

Πρόταση 1.16 *Έστω* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *σειρά* **μη αρνητικών όρων** *(*$a_n \geq 0$*).*

ι) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία* $\{ S_n \}_{n \geq 1}$ *είναι φραγμένη.*

ιι) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **δε** *συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία* $\{ S_n \}_{n \geq 1}$ **δεν** *είναι φραγμένη.*

Πρόταση 1.17 *(Κριτήριο σύγκρισης)*

ι) *Αν* $|a_n| \leq \beta_n$ *για κάθε* $n \geq N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ *και* $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ *συγκλίνει, τότε και η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

ιι) *Αν* $a_n \geq \beta_n \geq 0$ *για κάθε* $n \geq N_0$, *και επί πλέον αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ *αποκλίνει προς το* $+\infty$, *τότε και η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει προς το* $+\infty$.

Πρόταση 1.18 *Έστω οι συγκλίνουσες σειρές* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ *και* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. *Τότε*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda \, a_n + \kappa \, b_n = \lambda \, a + \kappa \, b, \qquad \text{για κάθε} \ \lambda \, , \kappa \, \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 1.19 *Αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει και η* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *αποκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)$ *αποκλίνει.*

Πρόταση 1.20 *Αν* $I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *και* $J = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *σειρές* **μη αρνητικών όρων** *και* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k.$

ι) *Αν* $k > 0$ *και* $I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει (αποκλίνει)* $\iff$ $J = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει(αποκλίνει).*

ιι) *Αν* $k = 0$ *και* J *συγκλίνει* $\implies$ I *συγκλίνει.*

ιιι) *Αν* $k = \infty$ *και* I *συγκλίνει* $\implies$ J *συγκλίνει.*

Πρόταση 1.21 *Αν η* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *συγκλίνει, τότε και η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει. Το αντίστροφο* **δεν** *ισχύει.*

Πρόταση 1.22 (Κριτήριο Leibniz) *Αν οι απόλυτες τιμές των όρων της εναλλάσσουσας σειράς αποτελούν* **φθίνουσα** *και* **μηδενική** *ακολουθία, τότε η σειρά συγκλίνει, δηλαδή,*
αν για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *ισχύουν :* **ι)** *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *και*
ιι) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, τότε αυτή συγκλίνει.*

Πρόταση 1.23 *(Κριτήριο ριζών του Cauchy) Έστω η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *με* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ *(δηλαδή* $\mathbb{R}$ *ή* $+\infty$*). Τότε :*

ι) *Αν* $\lambda < 1$*, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *συγκλίνει,*

ιι) *αν* $\lambda > 1$*, τότε η σειρά* **δε** *συγκλίνει (αποκλίνει),*

ιιι) *αν* $\lambda = 1$*, δεν μπορούμε ν' αποφανθούμε για τη σύγκλισή της.*

Πρόταση 1.24 *(Κριτήριο των λόγων του D' Alembert) Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *σειρά μη μηδενικών αριθμών με* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ *(δηλαδή* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ή* $\lambda = +\infty$*). Τότε :*

ι) *Αν* $\lambda < 1$*, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *συγκλίνει,*

ιι) *αν* $\lambda > 1$*, τότε η σειρά αποκλίνει και* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

ιιι) *αν* $\lambda = 1$, *δεν μπορούμε ν΄ αποφανθούμε για τη σύγκλιση των σειρών* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|$.

Πρόταση 1.25 *Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση* $f : [\,1,\, +\infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι θετική και φθίνουσα, τότε το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

και η σειρά

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

συγχρόνως συγκλίνουν ή αποκλίνουν. Στην περίπτωση σύγκλισης ισχύει

$$I \,<\, S \,< I + f(1).$$

Νοέμβριος 2008

Η Διδάσκουσα
Αδάμ Μαρία