ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ Λεβάδεια 1-03-07

ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ Ι - ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Διδάσκουσα : Μαρία Αδάμ

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν όσες από τις παραστάσεις $A+B, AB, BA, BA^t, B^2A$, AA^t, A^tA έχουν νόημα, με $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Να υπολογιστούν όσες από τις παραστάσεις $A+B$, $A-B$, AB, BA, A^2, έχουν νόημα, για τους σύνθετους πίνακες

   i) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$

   ii) $A=\begin{pmatrix} 1 & \vdots & 2 & 4 & \vdots & 3 \\ 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & \vdots & 3 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \cdots & \cdots \\ 4 & 1 \\ 7 & 9 \\ \cdots & \cdots \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Για τους σύνθετους πίνακες

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   i) Να υπολογισθεί το γινόμενο AB.

   ii) Υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα A; Αν ναι, ποιος είναι;

4. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί πίνακες X τέτοιοι ώστε $AX = XA$, όπου

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, να λυθεί η εξίσωση

$$XA + B = \mathbb{O}.$$

6. Δίνονται οι πίνακες $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ και $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Να λύσετε την εξίσωση $XB = A$, (X είναι κατάλληλος άγνωστος πίνακας). Να βρείτε τους πίνακες

X^{-1}, X^t (αν υπάρχουν). Τι παρατηρείτε για τους πίνακες XX^t, X^tX και $\left(XX^t\right)^{-1}$; Όσοι από τους πίνακες υπάρχουν να υπολογισθούν.

7. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ και $\Gamma=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Να λύσετε την εξίσωση $AXB=\Gamma$, (X είναι ο άγνωστος πίνακας). Να βρείτε αν υπάρχει καθένας από τους πίνακες X^{-1}, X^t, X^{2005}.

8. Έστω $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^2+2A-3I=\mathbb{O}$.

   i) Να απλοποιηθεί η παράσταση $A^4+2A^3-4A^2-A+I$.

   ii) Αποδείξατε ότι οι πίνακες $A,\ A+I,\ A+2I$ είναι αντιστρέψιμοι.

9. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$.

   i) Αν οι A,B είναι συμμετρικοί πίνακες, τότε ο $A+B$ είναι συμμετρικός πίνακας.

   ii) Αν οι A,B είναι αντισυμμετρικοί πίνακες, τότε ο $A+B$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας.

   iii) Αν ο A είναι συμμετρικός πίνακας, τότε ο $-A$ είναι συμμετρικός.

   iv) Αν ο A είναι αντισυμμετρικός πίνακας, τότε ο $-A$ είναι αντισυμμετρικός.

   v) Να δειχθεί ότι ο πίνακας AA^t και A^tA είναι πάντα συμμετρικοί.

   vi) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και συμμετρικός, τότε ο A^{-1} είναι συμμετρικός.

   vii) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και αντισυμμετρικός, τότε ο A^{-1} είναι αντισυμμετρικός.

10. Αν οι $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, αποδείξατε ότι ισχύουν :

    i) $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}\left(A+B\right)B^{-1}$, ii) $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}+B^{-1}=B\left(A+B\right)^{-1}A$

11. Έστω οι πίνακες $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$. Να αποδείξετε ότι ισχύουν τα επόμενα :

    i) $A\left(I+BA\right)=\left(I+AB\right)A$ και $\left(I+BA\right)B=B\left(I+AB\right)$

    ii) Αν υπάρχει ο $\left(I+AB\right)^{-1}$, τότε είναι $\left(I+BA\right)^{-1}=I-B\left(I+AB\right)^{-1}A$.

12. Ένα αεροσκάφος ίπταται έτσι ώστε οι συντεταγμένες (x_n,y_n,z_n) του σημείου όπου βρίσκεται μετά από n λεπτά πτήσης ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n+2y_n-z_n\\ y_{n+1}&=y_n+z_n\\ z_{n+1}&=z_n\end{aligned}$$

$n=1,2,\ldots$, όπου $x_0=a, y_0=b, z_0=c.$ Να βρεθούν οι συντεταγμένες του αεροσκάφους μετά από 5 ώρες πτήσης.

Υπόδειξη Έχουμε $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Άρα αρκεί να υπολογιστεί η δύναμη A^{300}. Αποδείξτε με επαγωγή ότι

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & (n-1)^2 - 1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$