Κεφάλαιο 3

Π Ι Ν Α Κ Ε Σ ΚΑΙ Γ Ρ Α Μ Μ Ι Κ Α Σ Υ Σ Τ Η Μ Α Τ Α

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή του λογισμού των πινάκων στα γραμμικά συστήματα. Θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στον αλγόριθμο απαλοιφής του Gauss, με τον οποίο από ένα δεδομένο γραμμικό σύστημα οδηγούμαστε σε ένα άλλο απλούστερο, το οποίο έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό και είναι ευκολότερο στη λύση του.

3.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

Ορισμός 3.1 (γραμμικά συστήματα)

Ένα σύνολο m *εξισώσεων και* n *αγνώστων* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *που έχει τη μορφή*

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{3.1}$$

ονομάζεται ***γραμμικό σύστημα*** m *εξισώσεων με* n *αγνώστους ή πιο απλά* $m \times n$ *γραμμικό σύστημα, όπου* $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{F}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Μια $n-$ *άδα αριθμών* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του* (3.1) *λέγεται* ***λύση*** *του συστήματος, και το σύνολο όλων των λύσεων* ***γενική λύση*** *του συστήματος. Η διαδικασία που ακολουθείται για τον έλεγχο ύπαρξης και την εύρεση ή μη ύπαρξης της γενικής λύσης του συστήματος λέγεται* ***επίλυση*** *του συστήματος. Όταν το γραμμικό σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση λέγεται* ***συμβιβαστό****, διαφορετικά* ***αδύνατο*** *ή* ***μη συμβιβαστό.***

Στην περίπτωση που $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ *, το σύστημα ονομάζεται* ***ομογενές****, διαφορετικά λέγεται* ***μη ομογενές.*** Είναι φανερό πως ένα ομογενές γραμμικό σύστημα είναι συμβιβαστό, αφού μία λύση του είναι η μηδενική (η οποία ονομάζεται **τετριμμένη λύση**), σύγκρινε με τα σχόλια $2^{ου}$ κεφαλαίου μετά το Παράδειγμα 2.9.

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο $2^{ο}$ Πρόταση 2.8 (μέθοδος Cramer), εφαρμόζοντας λογισμό πινάκων στο παραπάνω σύστημα, αυτό μπορεί να γραφεί

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} .$$

Ορισμός 3.2 (πίνακες και γραμμικά συστήματα)

Ο $m \times n$ *πίνακας* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *ονομάζεται* ***πίνακας των συντελεστών***

του συστήματος, ο πίνακας – στήλη $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *ονομάζεται* ***πίνακας των αγνώστων*** *και*

ο πίνακας $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *λέγεται* ***πίνακας των σταθερών όρων*** *του συστήματος.*

Ο $m \times (n+1)$ *πίνακας*

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

ονομάζεται ***επαυξημένος πίνακας*** *του συστήματος, ο οποίος προκύπτει από τον* A

αν επισυνάψουμε σε αυτόν μια επιπλέον στήλη, τη $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Για παράδειγμα, αν το γραμμικό σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= -6 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

τότε οι αντίστοιχοι πίνακες είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

Αν με ε_i συμβολίζουμε την $i-$ εξίσωση του γραμμικού συστήματος (3.1), είναι προφανές ότι :

- αν *εναλλάσσουμε δυο εξισώσεις* $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$ του αρχικού συστήματος (3.1), το νέο σύστημα που θα προκύψει θα έχει την ίδια γενική λύση με το αρχικό,
- αν αντικαταστήσουμε μια εξίσωση του συστήματος (3.1) με το πολλαπλάσιό της, $\varepsilon_i \to a\varepsilon_i$, $a \neq 0$, το νέο σύστημα που θα προκύψει θα έχει την ίδια γενική λύση με το αρχικό,
- αν αντικαταστήσουμε μια εξίσωση του (3.1) με την πρόσθεση σε αυτήν των αντίστοιχων μελών μιας άλλης εξίσωσης, αφού έχουν πολλαπλασιασθεί όλα τα μέλη της με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, $\varepsilon_j \to \varepsilon_j + a\varepsilon_i$, $a \neq 0$, και πάλι το νέο σύστημα που θα προκύψει θα έχει την ίδια γενική λύση με το αρχικό,

δηλαδή, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω «πράξεις», οι οποίες ονομάζονται **στοιχειώδεις πράξεις** ή **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί**, από το αρχικό σύστημα κατασκευάζεται ένα νέο σύστημα, το οποίο έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό και γι΄ αυτό τα δύο συστήματα ονομάζονται **ισοδύναμα**.

Αν σκεφτούμε ότι κάθε μία από τις προαναφερθείσες στοιχειώδεις πράξεις του γραμμικού συστήματος αντιστοιχούν και σε μία ανάλογη «πράξη» στις αντίστοιχες γραμμές του επαυξημένου του πίνακα, είμαστε σε θέση να δικαιολογήσουμε αφενός μεν τον όρο **γραμμοπράξεις** και τον ίδιο συμβολισμό που χρησιμοποιείται, και αφετέρου επειδή τα συστήματα που προκύπτουν είναι ισοδύναμα να δικαιολογήσουμε και να κατανοήσουμε τον επόμενο ορισμό.

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. Καθεμιά από τις παρακάτω διαδικασίες ονομάζεται **στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών** του πίνακα A ή πιο σύντομα **γραμμοπράξεις**, συγκεκριμένα

- εναλλαγή δύο γραμμών,
- πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του A με ένα μη μηδενικό στοιχείο του
- πρόσθεση σε μια γραμμή το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής,

και αν r_i είναι η $i-$ γραμμή του A οι αντίστοιχοι συμβολισμοί των παραπάνω γραμμοπράξεων είναι

- $r_i \leftrightarrow r_j$ (εναλλάσσουμε τις r_i, r_j)
- $r_i \to a r_i$ (πολλαπλασιάζουμε την r_i με τον αριθμό $a \neq 0$)
- $r_i \to r_i + a r_j$ (στη γραμμή r_i προσθέτουμε $a \neq 0$ φορές την r_j).

Ορισμός 3.3 (γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες)

*Έστω οι πίνακες $A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Θα λέμε ότι ο A είναι **γραμμοϊσοδύναμος** με τον B, αν ο B προκύπτει από τον A μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.*

Για παράδειγμα ο $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}$ επειδή $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}$.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις στις εξισώσεις ενός συστήματος με σκοπό να πάρουμε ένα απλούστερο σύστημα, ισοδύναμο με το αρχικό. Τις ίδιες πράξεις θα εφαρμόζουμε ταυτόχρονα και στις γραμμές του αντίστοιχου επαυξημένου πίνακα, μια και από τον ορισμό 3.3. φαίνεται καθαρά ότι ισοδύναμα συστήματα αντιστοιχούν σε γραμμοϊσοδύναμους επαυξημένους πίνακες, συνεπώς για διευκόλυνσή μας στη συνέχεια θα ασχολούμαστε μόνο με τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος για να οδηγούμαστε στην επίλυση των γραμμικών συστημάτων.

Παράδειγμα 3.1 Θεωρούμε το σύστημα $\begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{array}$.

Από το σύστημα έχουμε τον αντίστοιχο επαυξημένο πίνακα $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$.

Χρησιμοποιούμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος για να απαλείψουμε από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση τον x_1 άγνωστο. Αυτό επιτυγχάνεται αν πολλαπλασιάσουμε με -3 την πρώτη εξίσωση και την προσθέσουμε στη δεύτερη ($\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1$), ή με τη «γλώσσα» των γραμμοπράξεων στον επαυξημένο πίνακα ($r_2 \to r_2 - 3r_1$) και κατόπιν αν πολλαπλασιάσουμε με -5 την πρώτη εξίσωση και την προσθέσουμε στην τρίτη ($\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 - 5\varepsilon_1$), ή οι γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα είναι $r_3 \to r_3 - 5r_1$, και το σύστημα που θα προκύψει είναι

$$\begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{array}$$

και ο αρχικός επαυξημένος πίνακας γίνεται

$$\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 5r_1]{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\tilde{A} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right). \qquad (*)$$

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τη δεύτερη εξίσωση απαλείφουμε από την τρίτη τον άγνωστο x_2, το οποίο το πετυχαίνουμε αν πολλαπλασιάσουμε τη 2^{η} εξίσωση με -1 και την προσθέσουμε στην τρίτη $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-1)\varepsilon_2$, ή αντίστοιχα από τον επαυξημένο $\left(\tilde{A} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$ στην (*) κάνοντας τη γραμμοπράξη $r_3 \to r_3 + (-1)r_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_4 &= 1 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \left(\tilde{A} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\hat{A} \mid \hat{\boldsymbol{b}}\right)$$

Τέλος, αν πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{2}$ τη δεύτερη ($\varepsilon_2 \to \frac{1}{2}\varepsilon_2$) και με (-1) την τρίτη εξίσωση ($\varepsilon_3 \to (-1)\varepsilon_3$) θα πάρουμε ένα ισοδύναμο σύστημα με το αρχικό, αφού οι μόνες πράξεις που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί και το νέο σύστημα πολύ εύκολα επιλύεται, μια και έχει την μορφή

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= -\frac{1}{2} \\ x_4 &= -1 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \left(\hat{A} \mid \hat{\boldsymbol{b}}\right) \xrightarrow[r_3 \to (-1)r_3]{r_2 \to \frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad (**)$$

Πράγματι, αν λύσουμε το σύστημα της (**) με αντικατάσταση από την τελευταία εξίσωση προς την αρχική, έχουμε

$$x_4 = -1,\ \ x_2 - 2x_3 = 1 \ \Leftrightarrow\ x_2 = 1 + 2x_3,\ \ x_1 - (1 + 2x_3) + x_3 + (-1) = 1 \ \Leftrightarrow\ x_1 = 3 + x_3,$$

οπότε η γενική λύση είναι το σύνολο

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 + x_3,\ 1 + 2x_3,\ x_3,\ -1),\quad x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

ή όπως συνηθίζουμε να γράφουμε με μορφή πινάκων $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + x_3 \\ 1 + 2x_3 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R}$.

Η μορφή του επαυξημένου πίνακα στην (**) είναι γνωστή ως κλιμακωτή μορφή πίνακα ή όπως διαφορετικά λέμε ο πίνακας είναι κλιμακωτός.

Ορισμός 3.4 (κλιμακωτοί πίνακες)

- *Ένας πίνακας A ονομάζεται **κλιμακωτός** αν*

  i) *το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής (το οποίο ονομάζεται ηγετικό ή οδηγούν στοιχείο της γραμμής) βρίσκεται σε θέση δεξιότερα από το αντίστοιχο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής*

  ii) *οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές γραμμές.*

- *Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός** αν επιπλέον ισχύουν*

  iii) *το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1*

  iv) *το ηγετικό στοιχείο 1 είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.*

Για παράδειγμα, από τους επόμενους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο πρώτος και τρίτος είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί, ενώ ο δεύτερος είναι κλιμακωτός αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός. Ξαναβλέποντας το Παράδειγμα 3.1 και τους Ορισμούς 3.3, 3.4 εύκολα καταλήγουμε στις επόμενες προτάσεις :

Πρόταση 3.2

Κάθε $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν $m \times n$ κλιμακωτό πίνακα με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.

Πρόταση 3.3

Κάθε γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτός ή μπορεί να είναι ανηγμένος κλιμακωτός .

Η προηγούμενη πρόταση είναι σημαντική μια και όπως αναφέραμε πριν το παράδειγμα 3.1, θα ασχολούμαστε στο εξής μόνο με τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος, συνεπώς θα διευκολύνουμε τη διαδικασία της επίλυσής του αν ο πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, ακόμη καλύτερα αν είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή, γι΄ αυτό και εδώ παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο που μετασχηματίζει έναν πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό.

Αλγόριθμος
μετασχηματισμού ενός πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

Βήμα 1 Εντοπίζουμε την πρώτη μη μηδενική στήλη και μεταφέρουμε στην πρώτη γραμμή τη γραμμή εκείνη που περιέχει το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.

Βήμα 2 Μετατρέπουμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της πρώτης γραμμής σε 1.

Βήμα 3 Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στη στήλη του πρώτου 1 της πρώτης γραμμής και κάτω από αυτό.

Βήμα 4 Στην συνέχεια αγνοούμε την πρώτη στήλη και την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 – 3 για τις επόμενες γραμμές. (Αν οι επόμενες γραμμές είναι όλες μηδενικές, τότε παραλείπουμε το βήμα 4 και πάμε στο επόμενο βήμα.)

Βήμα 5 Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται σε κάθε στήλη που περιέχει το πρώτο 1 μιας γραμμής

Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.

3.2 Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην Πρόταση 3.3 χρησιμοποιώντας την λογική του προηγούμενου αλγορίθμου μπορούμε να μετατρέψουμε τον επαυξημένο πίνακα ενός γραμμικού συστήματος σε κλιμακωτό ή και σε ανηγμένο κλιμακωτό, οπότε τότε η επίλυση του συστήματος απλοποιείται. Η **μέθοδος απαλοιφής του Gauss** περιγράφει ακριβώς αυτή τη διαδικασία.

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα και τον αντίστοιχο επαυξημένο του πίνακα

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{array}, \quad \left(A \mid \boldsymbol{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- Έστω ότι $\alpha_{11} \neq 0$, (αν δε συμβαίνει κάνουμε εναλλαγή εξισώσεων ή ακόμη και αγνώστων, δηλαδή εναλλαγή στηλών, προκειμένου να έχουμε πρώτο στοιχείο στην 1^{η} γραμμή μη μηδενικό). Χρησιμοποιώντας την πρώτη γραμμή, κάνοντας γραμμοπράξεις μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία των επόμενων γραμμών που βρίσκονται στην ίδια στήλη με το α_{11}. Μέχρι εδώ έχουμε εφαρμόσει ουσιαστικά το $1^{\text{ο}}$ και $3^{\text{ο}}$ βήμα του προηγούμενου αλγορίθμου.
- Συνεχίζουμε τη διαδικασία που περιγράφηκε με τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής, έστω $\tilde{\alpha}_{22} \neq 0$ να είναι το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της δεύτερης γραμμής κάνοντας γραμμοπράξεις μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία των επόμενων γραμμών που βρίσκονται στην ίδια στήλη με το $\tilde{\alpha}_{22}$.
- Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία που περιγράφηκε προηγούμενα, για όλες τις γραμμές των γραμμοϊσοδύναμων επαυξημένων πινάκων που προκύπτουν,

οπότε καταλήγουμε σε έναν γραμμοϊσοδύναμο με τον αρχικό επαυξημένο πίνακα της μορφής

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{rr} & \cdots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m \end{array}\right) \tag{3.2}$$

συνεπώς το αντίστοιχο σύστημα θα είναι

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11}x_{i1}+\tilde{a}_{12}x_{i2}+\cdots+\tilde{a}_{1r}x_{ir}+\cdots+\tilde{a}_{1n}x_{in} &= \tilde{b}_1\\
\tilde{a}_{22}x_{i2}+\cdots+\tilde{a}_{2r}x_{ir}+\cdots+\tilde{a}_{2n}x_{in} &= \tilde{b}_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= \ldots\\
\tilde{a}_{rr}x_{ir}+\cdots+\tilde{a}_{rn}x_{in} &= \tilde{b}_r \ ,\\
0 &= \tilde{b}_{r+1}\\
\vdots\ \ &\ \ \vdots\\
0 &= \tilde{b}_m
\end{aligned} \tag{3.3}$$

όπου $\tilde{a}_{ii}\neq 0$, $i=1,2,\cdots,r$.

Από τη μορφή του συστήματος (3.3) προκύπτουν τα εξής **συμπεράσματα**:

i) Αν $r<m$ και κάποιο από τα $\tilde{b}_{r+1},\ldots,\tilde{b}_m\neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο, άρα ο πίνακας (3.2) θα έχει κάποια γραμμή της μορφής $\left(0\,0\cdots 0\,\middle|\,c\right)$, όπου $c\neq 0$.

ii) Αν $r\leq m$ και $\tilde{b}_{r+1}=\ldots=\tilde{b}_m=0$, το σύστημα είναι συμβιβαστό.

Ειδικότερα, αν $r=m$ και

α) αν $r=n$, το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση (είναι σύστημα Crammer, βλέπε Πρόταση 2.8),

β) αν $r<n$, τότε οι $n-r$ άγνωστοι $x_{i\,r+1},x_{i\,r+2},\ldots,x_{i\,r+n}$ ορίζονται αυθαίρετα, και οι υπόλοιποι προσδιορίζονται πλήρως από τη λύση του συστήματος (3.3), ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση προς την πρώτη, ακολουθώντας τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Σχόλια : ◆ Σχετικά με την περίπτωση ii) β) οι άγνωστοι που ορίζονται αυθαίρετα ονομάζονται **παράμετροι** ή **ελεύθεροι άγνωστοι** ή **ελεύθερες μεταβλητές**, το δε σύστημα λέμε ότι έχει $n-r$ πλήθος παραμέτρων ή $n-r$ παραμετρική απειρία λύσεων.

◆ Ο αριθμός που ισούται με r στον πίνακα του συστήματος (3.3) δηλώνει τον βαθμό του, όπως φαίνεται από τον επόμενο ορισμό. Συνεπώς ο βαθμός του πίνακα παίζει σημαντικότατο ρόλο στην ύπαρξη ή όχι λύσεων ενός γραμμικού συστήματος.

◆ Ειδικά στην περίπτωση όπου $r=m$ και $n-r=0 \Leftrightarrow r=n$, έχουμε να σχολιάσουμε ότι δεν υπάρχει καμία παράμετρος, άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό, συνεπώς έχει **ακριβώς μία λύση**, η οποία βρίσκεται με τη μέθοδο Cramer, βλέπε Πρόταση 2.8. (εδώ θέλει και άλλα σχόλια σε επόμενο κεφάλαιο για $\det A\neq 0$, οπότε $r=n=m$).

- Στην ειδική περίπτωση που το σύστημα είναι ομογενές και $r = n = m$, μοναδική λύση είναι η μηδενική, (βλέπε σχόλια μετά το Παράδειγμα 2.9 και Πρόταση 3.6), ενώ αν $r < n = m$, σύμφωνα με το ii) β) το ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις (βλέπε και Πρόταση 3.6).

Ορισμός 3.5 (βαθμός πίνακα)

*Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. **Βαθμός** ή **τάξη** του A ονομάζεται το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού (ή ανηγμένου κλιμακωτού) πίνακα του A και συμβολίζεται με $r(A)$ ή $rank(A)$.*

Προφανώς για τον βαθμό του πίνακα ισχύει $r(A) \le \min\{m, n\}$.

Για παράδειγμα, για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ έχουμε $r(A) = 1$, γιατί η κλιμακωτή μορφή του A είναι $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ενώ η τάξη του $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι $r(B) = 3$, επειδή ο πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μμορφή και υπάρχουν 3 μη μηδενικές γραμμές, τέλος, για να υπολογίσουμε την τάξη του $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, χρησιμοποιούμε γραμμοπράξεις $r_2 \to r_2 - r_1$, οπότε ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας του Γ είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, ο οποίος βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή , συνεπώς $r(\Gamma) = 3$.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση i) ότι δηλαδή, το σύστημα είναι αδύνατο όταν και μόνο όταν ο επαυξημένος κλιμακωτός πίνακας έχει γραμμή της μορφής $(0\,0\cdots 0 \mid c)$ με $c \neq 0$, είναι φανερό ότι ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός έχει γραμμή της μορφής $(0\,0\cdots 0 \mid 1)$, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο, και βέβαια στην περίπτωση αυτή ισχύει $r(A) \neq r(A \mid \boldsymbol{b})$.

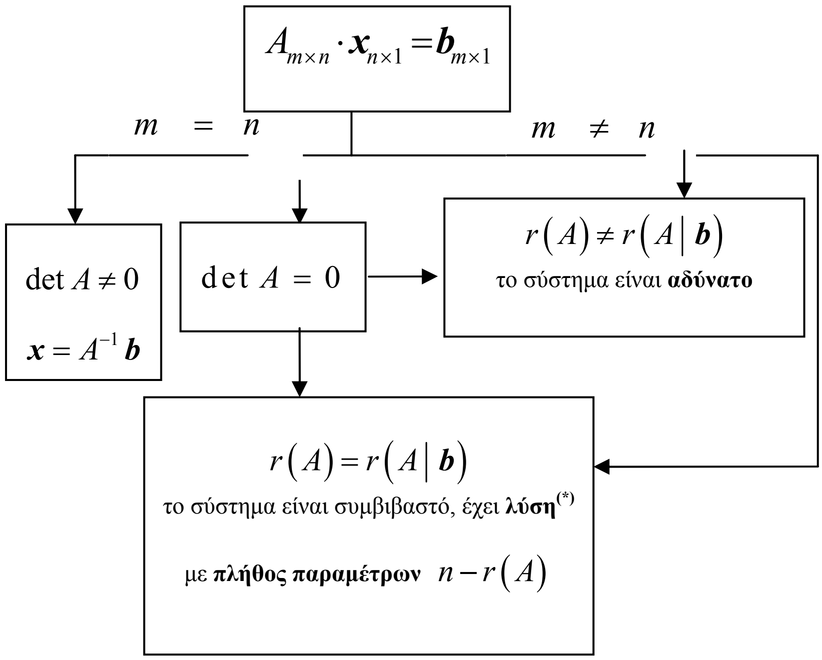
Συνοψίζοντας έχουμε :

Πρόταση 3.4

i) *Έστω* $\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)$ *ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος και* K *ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον* $\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)$. *Τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ο* K ***δεν*** *περιέχει γραμμή της μορφής* $\left(0\,0\cdots 0 \mid 1\right)$.

ii) *Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ισχύει* $r(A) = r\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)$.

Στο επόμενο διάγραμμα βλέπουμε την επίλυση ενός μη ομογενούς γραμμικού συστήματος .



(*) Αν το πλήθος παραμέτρων είναι **μηδέν**, τότε το σύστημα παρουσιάζει **μοναδική λύση**, διαφορετικά οι λύσεις είναι **άπειρες.**

Παράδειγμα 3.5 Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες είναι συμβιβαστό το επόμενο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= a \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= a \end{aligned}$$

Μετά από αρκετούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, ο επαυξημένος πίνακας $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & a \\ 4 & 1 & -2 & a \end{array}\right)$ του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$K = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 3a-19 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right).$$

Συμπεραίνουμε ότι η τάξη του πίνακα των συντελεστών είναι 3. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.4 το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $r(K)=3$, δηλαδή αν και μόνο αν η τελευταία γραμμή του K είναι μηδενική, οπότε θα πρέπει $a=3$.

Ειδικά στην περίπτωση που το σύστημα (3.1) είναι ομογενές, δηλαδή, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, η μέθοδος των γραμμοπράξεων οδηγεί σε έναν επαυξημένο πίνακα της μορφής (3.2) στον οποίο $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = \cdots \tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.4 (i) είναι πάντα συμβιβαστό, μια και δεν περιέχει γραμμή της μορφής $\left(0\,0 \cdots 0 \,|\, c\right)$ με $c \neq 0$.

- Όταν $r=m=n$, προφανώς η γενική λύση είναι η μηδενική.
- Αν $r<n$ έχει άπειρες λύσεις με $n-r$ παραμέτρους, όπως προκύπτει άμεσα από τα συμπεράσματα της γενικής περίπτωσης του γραμμικού συστήματος $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ ii) β).
- Στην περίπτωση $m<n$, οι λύσεις είναι άπειρες διαφορετικές από τη μηδενική, μια και ο βαθμός του επαυξημένου πίνακα είναι $r \le \min\{m,n\} = m$.

Έτσι έχουμε καταλήξει στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.6 (ομογενή συστήματα)

Έστω ένα ομογενές γραμμικό σύστημα m εξισώσεων, n αγνώστων και r να είναι η τάξη του πίνακα των συντελεστών του.

i) *Το ομογενές γραμμικό σύστημα έχει τη μηδενική λύση όταν $r=m=n$.*

ii) *Αν $m<n$ έχει άπειρες λύσεις και τότε το πλήθος των λύσεων ισούται με τη διαφορά $n-r$.*

Παράδειγμα 3.7 Το πλήθος των λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

υπολογίζεται ως ακολούθως: Με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to r_2 - r_1$ και $r_3 \to r_3 - 2r_1$ ο πίνακας των συντελεστών έχει τη μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, οπότε μετά από την γραμμοπράξη $r_3 \to r_3 - 3r_2$ έχουμε $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και όταν εφαρμόσουμε και $r_2 \to \frac{1}{2} r_2$ καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ο τελευταίος πίνακας έχει τάξη $r = 2$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.6 το πλήθος των λύσεων αποτελείται από $n - r = 4 - 2 = 2$ σύνολα, αφού έχει 2 παραμέτρους, η δε μέθοδος Gauss μπορεί να δώσει ακριβώς τη μορφή τους. Εφαρμόζοντάς την έχουμε τη μορφή του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 &= \frac{1}{2}x_4 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + 2x_4 - 3x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{2}x_4 \end{aligned},$$

από όπου τελικά έχουμε $x_1 = -2x_2 - x_4$, $x_3 = \frac{1}{2}x_4$,

οπότε η γενική λύση έχει τη μορφή $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

3.3 Αντιστρέψιμοι πίνακες

Οι γραμμοπράξεις και ιδιαίτερα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ενός τετραγωνικού πίνακα μας πληροφορούν για την ύπαρξη ή όχι του αντίστροφου πίνακά του και δίνουν και μέθοδο υπολογισμού του, όπως φαίνεται από την επόμενη πρόταση και τον αλγόριθμο υπολογισμού του που την ακολουθούν.

Πρόταση 3.8 (ύπαρξη αντίστροφου πίνακα και ανηγμένη κλιμακωτή μορφή)
Ένας $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα.

Αλγόριθμος Υπολογισμού Αντίστροφου Πίνακα

Θεωρούμε τον πίνακα $(A \mid I)$ στον οποίο εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών με σκοπό να μετατραπεί ο A σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα K. Τότε ο $(A \mid I)$ έχει μετατραπεί σε έναν πίνακα της μορφής $(K \mid B)$.

- Αν $K = I$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$.
- Αν $K \neq I$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Για παράδειγμα, εξετάζοντας αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος με τον αλγόριθμο που μόλις περιγράψαμε διαπιστώνουμε ότι αυτός δεν είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, $(A \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) = (K \mid B)$. Ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί ο πίνακας $K = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ενώ είναι ανηγμένος κλιμακωτός δεν είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 3.9 Να βρεθεί ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Απόδειξη Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο μετασχηματισμού ενός πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 + 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to \frac{1}{3} r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας και είναι βέβαια γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό. ◆◆◆

Παράδειγμα 3.10 Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο Gauss:

i) $\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 6 \end{aligned}$

ii) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$

iii) $\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$

iv) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \end{aligned}$

v) $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

vi) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= -1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -6 \end{aligned}$

Απόδειξη Τα συστήματα είναι της μορφής $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Οι επαυξημένοι πίνακες σημειώνονται $(A|\boldsymbol{b})$, και εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gauss, αφού υπολογίσουμε πρώτα το βαθμό του αντίστοιχου γραμμοϊσοδύναμου επαυξημένου κλιμακωτού πίνακα του συστήματος, ώστε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα από τις Προτάσεις 3.4 και 3.6.

i) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $(A|\boldsymbol{b}) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & -6 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 6 \end{array}\right)$.

Κάνοντας τους μετασχηματισμούς $r_1 \to r_2$ και $r_2 \to (-3)r_1 + r_2$ προκύπτει

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right)$$

άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, επειδή ισχύει $r\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) = r\left(A\right) = 2$. Το πλήθος των παραμέτρων είναι $n - r\left(A\right) = 4 - 2 = 2$, η μορφή της λύσης υπολογίζεται από το σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6 \\ -17x_4 = -17 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 + x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 1 \end{array}.$$

Συνεπώς οι άπειρες λύσεις είναι $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

ii) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right)$.

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \rightarrow (-2)r_1 + r_2$, $r_3 \rightarrow (-5)r_1 + r_3$ και $r_3 \rightarrow (-2)r_2 + r_3$, έχουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Από τον τελευταίο πίνακα προκύπτει ότι $r\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) = 3 \neq r\left(A\right) = 2$, επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

iii) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$. Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς $r_2 \rightarrow (-2)r_1 + r_2$, $r_3 \rightarrow (-3)r_1 + r_3$, $r_2 \rightarrow \frac{1}{7}r_2$, $r_3 \rightarrow \frac{1}{14}r_3$ και $r_3 \rightarrow (-1)r_2 + r_3$ παίρνουμε διαδοχικά :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 14 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 1 & -1/14 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & -5/14 \end{array}\right)$$

Επειδή ισχύει $r\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)=3 \neq r\left(A\right)=2$, το σύστημα είναι αδύνατο.

iv) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right)$. Εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to (-2)r_1 + r_2$ και $r_3 \to (-3)r_1 + r_3$, εναλλάσσουμε τις γραμμές $r_2 \to r_3$, οπότε έχουμε

$$\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv K .$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $r_2 \to (-1)r_2$, $r_3 \to 3r_2 + r_3$ και $r_3 \to \frac{1}{18} r_3$, βρίσκουμε:

$$K \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 54 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Επειδή $r\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)=r\left(A\right)=3$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n-r\left(A\right)=5-3=2$, οι οποίες θα υπολογισθούν από τη λύση του συστήματος

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_4 = -3x_5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ -3x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_5 \in \mathbb{R} .$$

v) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A \middle| \mathbf{0}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Εναλλάσσουμε τις γραμμές $r_1 \to r_4$ και τις στήλες $c_1 \to c_3$, έτσι έχουμε τον πίνακα

$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right)$. Εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to (-4)r_1 + r_2$, $r_3 \to r_1 + r_3$, $r_4 \to 2r_1 + r_4$, κατόπιν $r_2 \to \frac{1}{7}r_2$, $r_3 \to (-\frac{1}{2})r_3$ και τέλος $r_4 \to (-\frac{1}{5})r_4$, οπότε διαδοχικά έχουμε

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή του πίνακα, αν κάνουμε και τους μετασχηματισμούς $r_3 \to (-1)r_2 + r_3$, $r_4 \to (-1)r_2 + r_4$ και $r_3 \to (-1)r_3$, δηλαδή,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Επειδή $r\left(A \middle| \mathbf{0}\right) = r\left(A\right) = 3$, το σύστημα έχει λύση και μάλιστα με πλήθος παραμέτρων $n - r\left(A\right) = 3 - 3 = 0$, οπότε η λύση είναι μοναδική και υπολογίζεται από το σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} x_3 - x_2 + 3x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

vi) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε τους μετασχηματισμούς $r_2 \to (-3)r_1 + r_2$, $r_3 \to (-1)r_1 + r_3$, $r_4 \to (-5)r_1 + r_4$, $r_2 \to r_3$, κατόπιν $r_3 \to 4r_2 + r_3$ και $r_4 \to 3r_2 + r_4$, τέλος $r_3 \to \frac{1}{9}r_3$ και $r_4 \to (-5)r_3 + r_4$:

$$\left(A|\boldsymbol{b}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\3&-1&-1&2\\1&2&6&-1\\5&2&3&-6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&-4&-7&-1\\0&1&4&-2\\0&-3&-7&-11\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&4&-2\\0&-4&-7&-1\\0&-3&-7&-11\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&4&-2\\0&0&9&-9\\0&0&5&-17\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&4&-2\\0&0&1&-1\\0&0&5&-17\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&4&-2\\0&0&1&-1\\0&0&0&-12\end{array}\right)$$

Από τον τελευταίο πίνακα έχουμε $r\left(A\mid\boldsymbol{b}\right)=4\neq r\left(A\right)=3$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο. ◆◆◆

Παράδειγμα 3.11 Για τις διάφορες τιμές του $a\in\mathbb{R}$, να λυθούν τα συστήματα

$$\text{i)}\quad\begin{aligned}2x_1-ax_2+x_3&=1\\x_1-x_2+x_3&=a\\3x_1-x_2-x_3&=2\end{aligned}\qquad\qquad\text{ii)}\quad\begin{aligned}ax_1+x_2+x_3&=1\\x_1+ax_2+x_3&=1\\x_1+x_2+ax_3&=1\end{aligned}.$$

Απόδειξη i) Όπως αναφέρεται και στην παράγραφο 3.2 πρέπει πρώτα να χρησιμοποιήσουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος. Έτσι

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-a&1&1\\1&-1&1&a\\3&-1&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&a\\2&-a&1&1\\3&-1&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&a\\0&-a+2&-1&1-2a\\3&-1&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\to r_3-3r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&a\\0&-a+2&-1&1-2a\\0&2&-4&2-3a\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&a\\0&2&-4&2-3a\\0&-a+2&-1&1-2a\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\to\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&a\\0&1&-2&\left(2-3a\right)/2\\0&-a+2&-1&1-2a\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\to r_3+\left(a-2\right)r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&a\\0&1&-2&\left(2-3a\right)/2\\0&0&-2a+3&\left(-3/2\right)a^2+2a-1\end{array}\right)\equiv\left(\tilde{A}\mid\tilde{\boldsymbol{b}}\right)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.4 χρειάζεται να πάρουμε περιπτώσεις για να εξετάσουμε τον βαθμό του πίνακα $\tilde{A}$ και του $\left(\tilde{A}\mid\tilde{\boldsymbol{b}}\right)$

- Έστω $-2a+3\neq 0 \Rightarrow a\neq \frac{3}{2}$, οπότε τότε είναι $r\left(\tilde{A}\right)=r\left(\tilde{A}\,\middle|\,\tilde{\boldsymbol{b}}\right)=3$, άρα το σύστημα έχει λύση με πλήθος παραμέτρων $n-r=3-3=0$, το οποίο σημαίνει ότι έχει μοναδική λύση, την οποία θα υπολογίσουμε με μέθοδο Gauss. Λύνουμε με διαδοχικές αντικαταστάσεις το σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα το οποίο είναι :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= a \\ x_2 - 2x_3 &= \frac{2-3a}{2} \\ (-2a+3)x_3 &= -\frac{3}{2}a^2+2a-1 \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση του συστήματος έχουμε

$$x_3=\frac{-\frac{3}{2}a^2+2a-1}{-2a+3}=\frac{3a^2-4a+2}{4a-6}.$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$x_2-2x_3=\frac{2-3a}{2}\Rightarrow x_2-2\frac{3a^2-4a+2}{4a-6}=\frac{2-3a}{2}\Rightarrow x_2=\frac{5a-2}{4a-6}.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση $x_1-x_2+x_3=a$ βρίσκουμε μετά από πράξεις

$$x_1=\frac{a^2+3a-4}{4a-6}.$$

Συνεπώς η μοναδική λύση είναι

$$\left(x_1\ \ x_2\ \ x_3\right)^t=\left(\frac{a^2+3a-4}{4a-6}\quad \frac{5a-2}{4a-6}\quad \frac{3a^2-4a+2}{4a-6}\right)^t.$$

- Αν ισχύει $-2a+3=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}$, τότε $-\frac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$ (μάλιστα για κάθε πραγματικό a έχουμε $-\frac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$ αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική). Έτσι έχουμε $r\left(\tilde{A}\right)=2\neq r\left(\tilde{A}\,\middle|\,\tilde{\boldsymbol{b}}\right)=3$, συνεπώς από την Πρόταση 3.4 συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

ii) Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - a r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -a^2+1 & -a+1 & 1-a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -a^2+1 & -a+1 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -(a-1)(a+1) & -(a-1) & -(a-1) \\ 0 & -(a-1) & a-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -(a-1) & a-1 & 0 \\ 0 & -(a-1)(a+1) & -(a-1) & -(a-1) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - (a+1) r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -(a-1) & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & -(a-1) \end{array}\right) \equiv \left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.4, ο βαθμός του πίνακα $\tilde{A}$ και $\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$ καθορίζουν την ύπαρξη (ή όχι) και το πλήθος των λύσεων του συστήματος.

- Αν $(a-1)(a+2) \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$ και $a \neq -2$, τότε ισχύει $r\left(\tilde{A}\right) = r\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right) = 3$, άρα το σύστημα έχει λύση και μάλιστα το πλήθος παραμέτρων της είναι $n - r = 3 - 3 = 0$, το οποίο δείχνει ότι η λύση είναι μοναδική, και την υπολογίζουμε με μέθοδο Gauss. Το σύστημα που προκύπτει από τον τελευταίο πίνακα είναι :

$$\begin{aligned} & x_1 + a x_2 + x_3 \ = 1 \\ & -(a-1)x_2 + (a-1)x_3 = 0 \\ & -(a-1)(a+2)x_3 = -(a-1) \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση του συστήματος έχουμε $x_3 = \dfrac{1}{a+2}$, από τη δεύτερη $x_2 = x_3 = \dfrac{1}{a+2}$ και από την πρώτη μετά από αντικατάσταση των δύο προηγούμενων έχουμε $x_1 = 1 - a x_2 - x_3 = \dfrac{1}{a+2}$

Συνεπώς η μοναδική λύση είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a+2} & \dfrac{1}{a+2} & \dfrac{1}{a+2} \end{pmatrix}^t .$$

- Αν ισχύει $a+2=0 \Rightarrow a=-2$, τότε $\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$, από όπου έχουμε

$r\left(\tilde{A}\right)=2 \neq r\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right)=3$, και τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.4 το σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $a-1=0 \Rightarrow a=1$, τότε $\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, δηλαδή το σύστημα έχει

άπειρες λύσεις, μια και έχει πλήθος παραμέτρων $n-r=3-1=2$. Τη μορφή των λύσεων θα την βρούμε από τη μοναδική εξίσωση του συστήματος Gauss που μένει και είναι $x_1+x_2+x_3=1 \;\Rightarrow\; x_1=1-x_2-x_3$, συνεπώς οι λύσεις δίνονται από

$$\left(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3\right)^t = \left(1-x_2-x_3 \quad x_2 \quad x_3\right)^t \;, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

◆◆◆

Εφαρμογή 3.12 Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+x_2+ax_3 &= a^2 \\ x_1+ax_2+x_3 &= a \\ ax_1+x_2+x_3 &= 1 \end{aligned}$$

i) έχει ακριβώς μια λύση και να βρεθεί η λύση αυτή,

ii) είναι αδύνατο,

iii) έχει άπειρες λύσεις και να δοθεί η παραμετρική οικογένεια των λύσεων αυτών.

Απόδειξη Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς $\mathrm{r}_2 \to -\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2$, $r_3 \to (-a)r_1+r_3$ και $r_3 \to r_2+r_3$, έχουμε

$$\left(A \middle| b\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & (a+1)^2(1-a) \end{array}\right) \equiv B$$

i) Από τον πίνακα B προκύπτει ότι για να έχει ακριβώς μία λύση το σύστημα πρέπει $r\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right)=r\left(A\right)=3$, το οποίο συμβαίνει όταν $a \neq -2$ και $a \neq 1$. Γι΄ αυτές τις τιμές του a, η λύση δίνεται από το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + a x_3 &= a^2 \\ (a-1)x_2 + (1-a)x_3 &= a - a^2 \\ (-a^2 - a + 2)x_3 &= (a+1)^2(1-a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{-(a+1)}{a+2} \\ x_2 &= \frac{1}{a+2} \\ x_3 &= \frac{(a+1)^2(1-a)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2} \end{aligned}$$

ii) Για $a = -2$, ο πίνακας B γίνεται $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \equiv B_1$, επομένως

$r\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_1\right) = 3 \neq r\left(A\right) = 2$, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

iii) Για $a = 1$, ο πίνακας B γίνεται $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv B_2$, συνεπώς

$r\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_2\right) = r\left(A\right) = 1$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n - r\left(A\right) = 3 - 1 = 2$, οι οποίες υπολογίζονται από τη λύση του ισοδυνάμου συστήματος που σχηματίζεται από τον πίνακα B_2. Έτσι,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = 1 - x_1 - x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

◆◆◆

Εφαρμογή 3.13 Για τις διάφορες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + a x_2 + a x_3 &= b \\ x_1 + a^2 x_2 + 2a x_3 &= ab \end{aligned}.$$

Απόδειξη Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & b \\ 1 & a^2 & 2a & ab \end{array}\right).$$

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς $r_2 \to (-1)r_1 + r_2$, $r_3 \to (-1)r_1 + r_3$ και $r_3 \to (-a-1)r_2 + r_3$, έχουμε

$$\left(A|\boldsymbol{b}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & a-1 & b-1\\ 0 & a^2-1 & 2a-1 & ab-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & a-1 & b-1\\ 0 & 0 & a(2-a) & a-b\end{array}\right)\equiv B$$

- Από τον πίνακα B προκύπτει ότι για να έχει ακριβώς μία λύση το σύστημα πρέπει $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B\right)=r\left(A\right)=3$, το οποίο συμβαίνει όταν $a\neq 0$, $a\neq 1$ και $a\neq 2$. Τότε, η λύση του αρχικού συστήματος προκύπτει από τη λύση του συστήματος που σχηματίζεται από τον ισοδύναμο πίνακα B, δηλαδή,

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &=1\\ (a-1)x_2+(a-1)x_3 &=b-1\\ a(2-a)x_3 &=a-b\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1 &=\frac{(a-b)(2a-a^2)}{a(a-1)(2-a)}=\frac{a-b}{a-1}\\ x_2 &=\frac{3ab-a^2b-a-b}{a(a-1)(2-a)}\\ x_3 &=\frac{a-b}{a(2-a)}\end{aligned}.$$

- Στην περίπτωση που $a=0$, ο πίνακας B γίνεται $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & b-1\\ 0 & 0 & 0 & -b\end{array}\right)\equiv B_1$.

Από τον B_1 συμπεραίνουμε ότι:

- αν $b\neq 0$, επειδή $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_1\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $b=0$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_1\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, που είναι της μορφής

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=1\\ x_2+x_3&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned}x_1&=0\\ x_2&=1-x_3\end{aligned}\quad\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1-x_3\\ x_3\end{pmatrix},\quad x_3\in\mathbb{R}.$$

- Στην περίπτωση που $a=1$, ο B πίνακας είναι $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & b-1\\ 0 & 0 & 1 & 1-b\end{array}\right)\equiv B_2$.

Από τον B_2 είναι φανερό ότι :

- αν $b\neq 1$, επειδή $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_2\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $b=1$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_2\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι της μορφής :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bigm| & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 1 - x_1 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_1 \in \mathbb{R}$$

- Στην περίπτωση που $a = 2$, ο B πίνακας γράφεται $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \bigm| & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 2-b \end{pmatrix} \equiv B_3$

Από τον B_3 είναι φανερό ότι :

- αν $b \neq 2$, επειδή $r\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_3\right) = 3 \neq r\left(A\right) = 2$, το σύστημα είναι αδύνατο,
- όταν $b = 2$, τότε $r\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_3\right) = r\left(A\right) = 2$, συνεπώς το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι της μορφής :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 1 - x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 1 - x_2 \end{pmatrix}, \; x_2 \in \mathbb{R}.$$

◆◆◆

Εφαρμογή 3.14 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= \lambda \\ \alpha^2 x_1 + \beta^2 x_2 + \gamma^2 x_3 &= \lambda^2 \end{aligned}.$$

Απόδειξη Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \bigm| & \lambda \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \bigm| & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί $r_2 \to (-\alpha) r_1 + r_2$, $r_3 \to (-\alpha^2) r_1 + r_3$ και $r_3 \to (-\alpha - \beta) r_2 + r_3$ δίνουν

$$\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \lambda-\alpha\\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 & \lambda^2-\alpha^2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \lambda-\alpha\\ 0 & 0 & (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) & (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)\end{array}\right)\equiv B$$

- Από τον B προκύπτει ότι το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση αν $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B\right)=r\left(A\right)=3$, το οποίο συμβαίνει όταν $\alpha\neq\beta\neq\gamma$. Τότε το σύστημα είναι:

$$\left.\begin{array}{r}x_1+x_2+x_3=1\\ (\beta-\alpha)x_2+(\gamma-\alpha)x_3=\lambda-\alpha\\ (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x_3=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}x_1=\dfrac{(\lambda-\gamma)(\lambda-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\\ x_2=\dfrac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\\ x_3=\dfrac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\end{array}$$

- Όταν $\alpha=\beta\neq\gamma$, ο πίνακας B γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \gamma-\alpha & \lambda-\alpha\\ 0 & 0 & (\gamma-\alpha)^2 & (\lambda-\alpha)^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\to(-\gamma+\alpha)r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \gamma-\alpha & \lambda-\alpha\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-\alpha)(\lambda-\gamma)\end{array}\right)\equiv B_1.$$

Από τον πίνακα B_1 είναι φανερό ότι :

- αν $\lambda\neq\alpha$ και $\lambda\neq\gamma$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_1\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $\lambda=\alpha$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_1\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \gamma-\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x_1+x_2+x_3=1\\ (\gamma-\alpha)x_3=0\end{array}\right\}\overset{(\gamma\neq\alpha)}{\Rightarrow}\begin{array}{l}x_2=1-x_1\\ x_3=0\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ 1-x_1\\ 0\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$$

- αν $\lambda=\gamma$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_1\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma-\alpha & \gamma-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ (\gamma-\alpha)x_3=\gamma-\alpha \end{array}\right\} \overset{(\gamma\neq\alpha)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x_2=-x_1 \\ x_3=1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$$

- Όταν $\alpha=\gamma\neq\beta$, ο πίνακας B γίνεται $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & \lambda-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) \end{array}\right)\equiv B_2$.

Από τον πίνακα B_2 είναι φανερό ότι :

- αν $\lambda\neq\alpha$ και $\lambda\neq\beta$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_2\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $\lambda=\alpha$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_2\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ (\beta-\alpha)x_2=0 \end{array}\right\} \overset{(\beta\neq\alpha)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x_3=1-x_1 \\ x_2=0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1-x_1 \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$$

- αν $\lambda=\beta$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_2\right)=r\left(A\right)=2$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ (\beta-\alpha)x_2=\beta-\alpha \end{array}\right\} \overset{(\beta\neq\alpha)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x_3=-x_1 \\ x_2=1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ -x_1 \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$$

- Όταν $\beta=\gamma\neq\alpha$, ο πίνακας B γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta-\alpha & \lambda-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) \end{array}\right)\equiv B_3.$$

Από τον πίνακα B_3 είναι φανερό ότι :

- αν $\lambda\neq\alpha$ και $\lambda\neq\beta$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_3\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $\lambda=\alpha$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_3\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ (\beta-\alpha)(x_2+x_3)=0 \end{array}\right\} \overset{(\beta\neq\alpha)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_3=-x_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \; x_2 \in \mathbb{R}$$

- αν $\lambda=\beta$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_3\right)=r\left(A\right)=2$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και ο πίνακας συντελεστών του συστήματος είναι $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, από τον οποίο έχουμε :

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ (\beta-\alpha)(x_2+x_3)=\beta-\alpha \end{array}\right\} \overset{(\beta\neq\alpha)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_3=1-x_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 1-x_2 \end{pmatrix}, \; x_2 \in \mathbb{R}$$

- Όταν $\alpha=\beta=\gamma$, ο πίνακας B γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-\alpha)^2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3\to(-\lambda+\alpha)r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv B_4 .$$

Από τον πίνακα B_4 είναι φανερό ότι :

- αν $\lambda\neq\alpha$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_4\right)=2\neq r\left(A\right)=1$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $\lambda=\alpha$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_4\right)=r\left(A\right)=1$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1+x_2+x_3=1 \Rightarrow x_3=1-x_1-x_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1-x_1-x_2 \end{pmatrix}, \; x_1, x_2 \in \mathbb{R} .$$

◆◆◆

Εφαρμογή 3.15 Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι όταν αυτοί υπάρχουν. Στη συνέχεια να λυθεί το σύστημα $C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Απόδειξη Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα, από όπου έχουμε:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a-6 & -3 & 1 \end{array}\right) \equiv (K|B).$$

- Αν $a = 6$, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, σύμφωνα με την Πρόταση 3.8 και τον αλγόριθμο, αφού $K \neq I$.
- Έστω ότι $a \neq 6$. Τότε μπορούμε να συνεχίσουμε τις γραμμοπράξεις στον $(K \mid B)$ και έχουμε :

$$(K|B) \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{a-6} r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/(a-6) & 1/(a-6) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a/(a-6) & -2/(a-6) \\ 0 & 1 & -3/(a-6) & 1/(a-6) \end{array}\right)$$

Στην περίπτωση αυτή ο A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a-6} & \dfrac{-2}{a-6} \\ \dfrac{-3}{a-6} & \dfrac{1}{a-6} \end{pmatrix}.$$

Για τον C έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{-6} r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 9r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array}\right) \equiv \left(I \,\middle|\, C^{-1}\right).$$

Άρα ο C είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο $\begin{pmatrix} 2 & -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Για να λύσουμε το σύστημα $C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ μπορούμε φυσικά να εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Ένας άλλος τρόπος είναι να αξιοποιήσουμε την πληροφορία ότι ο C είναι αντιστρέψιμος και να εφαρμόσουμε τη σχέση (2.6) από την απόδειξη της μεθόδου Cramer (βλ Πρόταση 2.8). Οπότε έχουμε

$$C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad C^{-1}C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

από όπου έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

◆◆◆

Ασκήσεις

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

i) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$ ii) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$ iii) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$

2. Για τις διάφορες τιμές $a \in \mathbb{R}$, να λυθούν τα συστήματα :

i) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$ ii) $\begin{aligned} (a-1)x_1 + (a-1)x_2 &= 1-a \\ x_1 + ax_2 + ax_3 &= a-1 \\ (a^2-a)x_1 + (a^2-a)x_3 &= 0 \end{aligned}$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά σας, δώστε τις λύσεις όταν $a = 3$.

3. Δίνονται τα συστήματα :

i) $\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + (\lambda-5)x_3 &= k-1 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 &= 0 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$ ii) $\begin{aligned} (\lambda-2)x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + (\lambda-1)x_2 + 2x_3 &= k \\ x_1 + (\lambda+2)x_3 &= 0 \end{aligned}$

Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $k, \lambda \in \mathbb{R}$, να λυθούν τα προηγούμενα συστήματα ώστε να έχουν

a) μοναδική λύση, b) άπειρες λύσεις, c) καμία λύση

και στη συνέχεια να βρεθούν οι μορφές των λύσεων όπου αυτές υπάρχουν.

4. Για ποιες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= a \\ 5x_1 - 3x_2 + bx_3 &= 4 \end{aligned}$$

έχει i) άπειρες λύσεις, ii) μοναδική λύση, iii) είναι αδύνατο;

5. Για ποιες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + bx_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

είναι αδύνατο;

6. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= a^2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2a \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= a \end{aligned}$$

να είναι συμβιβαστό. Κατόπιν για τις τιμές του a που υπολογίστηκαν προηγούμενα να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος. Για $a = 2$, ποια είναι η λύση του συστήματος;

7. Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, ο αντίστροφοι των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ όπου } a \in \mathbb{R}.$$

8. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο $f(x)$ με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς δευτέρου βαθμού, τέτοιο ώστε $f(1) = 2, \quad f(2) = 9, \quad f(3) = 20$.