9.6 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 9.7 Σε κάθε μία από τις επόμενες τετραγωνικές μορφές, να βρείτε μία αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή.

i) $q_1(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$

ii) $q_2(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 + 6x_2x_3 + 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

iii) $q_3(\boldsymbol{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ του $\mathbb{R}^3$

Απόδειξη : i) Σύμφωνα με τις σχέσεις (9.2) και (9.3), ο αντίστοιχος πραγματικός συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1 χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A_1 και τα ιδιοδιανύσματά του, τα οποία θα αποτελέσουν τις στήλες του ορθογωνίου πίνακα P, αρκεί αυτά να είναι ορθογώνια. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_1 είναι $\chi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 7)$, οπότε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 7$.

- Για $\lambda_1 = 2$, από $(A_1 - 2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(2) = \left\{x_2 (2 \quad 1)^t \ : x_2 \in \mathbb{R}\right\}$. Επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (2 \quad 1)^t$ ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_1.
- Για $\lambda_2 = 7$, από $(A_1 - 7I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(7) = \left\{x_1 (1 \quad -2)^t \ : x_1 \in \mathbb{R}\right\}$. Επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad -2)^t$ ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_2.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A_1 είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα (Πρόταση 7.6). Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας $P \in M_2(\mathbb{R})$ κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A_1, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή,

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα επαληθεύουμε την ισότητα στην (9.5), δηλαδή,

$$P^t A_1 P = diag(2, 7)$$

και χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό από την (9.6), $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, η τετραγωνική μορφή $q_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_1 \boldsymbol{x}$, μετά από πράξεις, μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή, που είναι

$$\boldsymbol{x}^t A_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t P^t A_1 P \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = 2y_1^2 + 7y_2^2,$$

αποτέλεσμα που επαληθεύει την (9.7).

ii) Από την (9.3), ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(\boldsymbol{x})$ είναι $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Για να εφαρμόσουμε την Πρόταση 9.1 βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του πίνακα A_2 και τα ιδιοδιανύσματά του. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_2 είναι $\chi_{A_2}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-9)$. Επομένως, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ και $\lambda_3 = 9$.

- Για $\lambda_1 = -1$, από $(A_2 + I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(-1) = \left\{x_3 \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}^t \ : x_3 \in \mathbb{R}\right\}$. Επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}^t$ ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_1.
- Για $\lambda_2 = 4$, από $(A_2 - 4I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(4) = \left\{x_2 \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}^t \ : x_2 \in \mathbb{R}\right\}$. Επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}^t$ ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_2.
- Τέλος, για $\lambda_3 = 9$, από $(A_2 - 9I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(9) = \left\{x_3 \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t \ : x_3 \in \mathbb{R}\right\}$. Επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_3 = (-4 \quad 3 \quad 5)^t$ ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_3.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A_2 είναι διακεκριμένες, όλα τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο μεταξύ τους κάθετα (Πρόταση 7.6). Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας $P \in M_3(\mathbb{R})$ κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A_2, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή ,

$$P=\begin{pmatrix} 4/\sqrt{50} & 3/5 & -4/\sqrt{50} \\ -3/\sqrt{50} & 4/5 & 3/\sqrt{50} \\ 5/\sqrt{50} & 0 & 5/\sqrt{50} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4/5\sqrt{2} & 3/5 & -4/5\sqrt{2} \\ -3/5\sqrt{2} & 4/5 & 3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι, επαληθεύεται η ισότητα στην (9.5), δηλαδή ισχύει $P^t A_2 P = diag(-1, 4, 9)$ και χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό της (9.6), $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, με $\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t$, η τετραγωνική μορφή $q_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_2 \boldsymbol{x}$, μετά από πράξεις, μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$\boldsymbol{x}^t A_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t P^t A_2 P \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = -y_1^2 + 4y_2^2 + 9y_3^2 .$$

iii) Όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(\boldsymbol{x})$ είναι $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$. Για να εφαρμόσουμε την Πρόταση 9.1 βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του πίνακα A_3 και τα ιδιοδιανύσματά του. Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_3 είναι $\chi_{A_3}(\lambda) = (\lambda - 12)(\lambda - 6)^2$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 12$ και $\lambda_2 = 6$ (αλγεβρικής πολλαπλότητας 2).

● Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 12$, από $(A_3 - 12I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(12) = \left\{ x_2 (-1 \quad 1 \quad 2)^t \ : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (-1 \quad 1 \quad 2)^t$ ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_1.

● Για την $\lambda_2 = 6$, από $(A_3 - 6I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(6) = \left\{ x_2 (1 \quad 1 \quad 0)^t + x_3 (2 \quad 0 \quad 1)^t \ : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Επιλέγουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad 1 \quad 0)^t$ και $\boldsymbol{x}_3 = (2 \quad 0 \quad 1)^t$ ως αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ_2.

Τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ και $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές, άρα είναι κάθετα (Πρόταση 7.6).

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1, ο πίνακας $P \in M_3(\mathbb{R})$ πρέπει να είναι ορθογώνιος. Επομένως, χρειάζεται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt για τα $\{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$. Αρχικά βρίσκουμε ότι $\hat{\boldsymbol{x}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \dfrac{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle}{\|\boldsymbol{x}_2\|^2}\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^t$. Διαιρώντας καθένα από τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3$ με το μέτρο τους, ώστε να μετατραπούν σε μοναδιαία, έχουμε

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\|\hat{\boldsymbol{x}}_3\|}\hat{\boldsymbol{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Οπότε, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι

$$P = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι, επαληθεύεται η ισότητα στην (9.5), δηλαδή

$$P^t A_3 P = diag(12, 6, 6),$$

και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της (9.6), $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, με $\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t$, η τετραγωνική μορφή $q_3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_3 \boldsymbol{x}$, μετά από πράξεις, μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή, που είναι

$$\boldsymbol{x}^t A_3 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t P^t A_3 P \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t \begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}\boldsymbol{y} = 12y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2.$$ ♦♦♦

Παράδειγμα 9.8 Να εξετασθεί το πρόσημο των επόμενων τετραγωνικών μορφών

i) $q_1(\boldsymbol{x}) = 8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

ii) $q_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

iii) $q_3(\boldsymbol{x}) = -4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

iv) $q_4(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 4x_1x_4 + 2x_2^2 - 4x_2x_4 + 3x_3^2 + 3x_4^2$ του $\mathbb{R}^4$

Απόδειξη : i) Η τετραγωνική μορφή $q_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_1 \boldsymbol{x}$ έχει αντίστοιχο πίνακα $A_1 = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Το πρόσημο της τετραγωνικής μορφής είναι το ίδιο με το πρόσημο του αντίστοιχου πίνακά της, το οποίο εξαρτάται από το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα (Πρόταση 9.2). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_1 είναι $\chi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - 8)(\lambda^2 - 11\lambda + 11)$. Επομένως, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = \frac{11 - \sqrt{77}}{2} > 0$ και $\lambda_3 = \frac{11 + \sqrt{77}}{2}$. Όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικοί αριθμοί, οπότε ο πίνακας A_1 είναι θετικά ορισμένος (Πρόταση 9.2 (i)). Άρα, η τετραγωνική μορφή $q_1(\boldsymbol{x})$ είναι θετικά ορισμένη.

ii) Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_2 \boldsymbol{x}$ είναι $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Όπως και προηγούμενα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_{A_2}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda - 8)$. Επομένως, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{17} < 0$ και $\lambda_3 = 3 + \sqrt{17}$. Επειδή υπάρχει τουλάχιστο μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή, ο πίνακας A_2 είναι αόριστος (Πρόταση 9.2 (iii)). Άρα, η τετραγωνική μορφή $q_2(\boldsymbol{x})$ είναι αόριστη.

iii) Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_3 \boldsymbol{x}$ είναι $A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_{A_3}(\lambda) = (\lambda + 6)(\lambda^2 + 6\lambda + 6)$. Επομένως, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -3 - \sqrt{3}$ και $\lambda_2 = -3 + \sqrt{3}$. Όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικοί αριθμοί, σύμφωνα με την Πρόταση 9.2 (ii) ο πίνακας A_3 είναι αρνητικά ορισμένος. Άρα, η τετραγωνική μορφή $q_3(\boldsymbol{x})$ είναι αρνητικά ορισμένη.

iv) Η τετραγωνική μορφή $q_4(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_4 \boldsymbol{x}$ έχει αντίστοιχο πίνακα $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_4 είναι $\chi_{A_4}(\lambda) = \lambda(\lambda-3)^2(\lambda-6)$. Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_3 = 6$. Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικοί αριθμοί, ο πίνακας A_4 είναι θετικά ημιορισμένος (Πρόταση 9.2 (i)). Άρα, η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ημιορισμένη $q_4(\boldsymbol{x}) \geq 0$. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.9 Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, ώστε οι πίνακες

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad \text{iii) } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & a & 6 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{iv) } D = \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 9 \end{pmatrix}$$

να είναι θετικά ορισμένοι.

Απόδειξη : i) Η ορίζουσα του πίνακα A είναι $\det A = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2 \leq 0$ και ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα A (Πρόταση 7.1). Είναι φανερό ότι οι τρεις ιδιοτιμές δεν μπορεί να είναι όλες θετικές, ώστε ο συμμετρικός πίνακας A να είναι θετικά ορισμένος, (Πρόταση 9.2(i)). Κατά συνέπεια **δεν** υπάρχουν τιμές για την παράμετρο a, τέτοιες ώστε ο πίνακας A να είναι θετικά ορισμένος.

ii) Οι ορίζουσες όλων των κύριων υποπινάκων του πίνακα B είναι $\det B_1 = 5 > 0$, $\det B_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ και $\det B = a - 2$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.3(i), ο συμμετρικός πίνακας B είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ορίζουσες των κύριων υποπινάκων του είναι θετικές, άρα πρέπει $a - 2 > 0$. Συνεπώς για κάθε $a > 2$, ο πίνακας B είναι θετικά ορισμένος.

iii) Όπως και προηγούμενα, υπολογίζονται όλες οι ορίζουσες των κύριων υποπινάκων του πίνακα C και έχουμε :

$$\det C_1 = 1 > 0, \qquad \det C_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & a \end{pmatrix} = a - 16 \quad \text{και} \quad \det C = -24a + 188.$$

Για να είναι θετικά ορισμένος ο C, πρέπει $\det C_2 > 0$ και $\det C > 0$. Άρα, οι ανισώσεις συναληθεύουν, όταν ισχύει

$$\left.\begin{aligned} a-16>0 \\ -24a+188>0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &a>16 \\ &a<\frac{47}{6}\approx 7.833 \end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατο. Άρα, **δεν** υπάρχουν τιμές για την παράμετρο a τέτοιες ώστε ο πίνακας C να είναι θετικά ορισμένος.

iv) Επειδή η ορίζουσα του πρώτου υποπίνακα είναι θετική ($\det D_1 = 4$), πρέπει και η ορίζουσα του πίνακα D να είναι θετική, ώστε να εφαρμόζεται η Πρόταση 9.3(i). Άρα, πρέπει $\det D = 36 - a^2 > 0$, που συμβαίνει μόνο όταν $-6 < a < 6$. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.10 Να βρείτε το είδος των επόμενων επιφανειών

i) $5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 - x_3^2 = 1$

ii) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2 - 10x_1 + 8x_2 + 14x_3 = 6$

iii) $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_3^2 = 1$

iv) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 - 12x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 1$

v) $2x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 = 0$

Απόδειξη : i) Η αντίστοιχη εξίσωση της (9.11) είναι η

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} - 1 = 0, \qquad (9.37)$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής

$q_1(\boldsymbol{x}) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 - x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ με $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Για το μετασχηματισμό στην (9.37) χρειάζεται να υπολογίσουμε έναν ορθογώνιο πίνακα P, ο οποίος κατασκευάζεται από τα ορθοκανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του A. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ και $\lambda_3 = 6$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(-1) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (0 \quad 0 \quad 1)^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = -1$. Στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(4) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad -1 \quad 0)^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_2, και τέλος, στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 6$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(6) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$,

από τον οποίο επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_3 = (1 \quad 1 \quad 0)^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της λ_3.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο μεταξύ τους κάθετα (Πρόταση 7.6). Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $\boldsymbol{z} = (z_1 \quad z_2 \quad z_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό από την (9.6) και από την ισότητα στην (9.5), έχουμε

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

και

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^t P^t AP\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^t diag(-1,4,6)\boldsymbol{z}.$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην (9.37) με τις παραπάνω ισότητες, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} - 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{z}^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} - 1 = 0 \quad \Rightarrow -z_1^2 + 4z_2^2 + 6z_3^2 - 1 = 0, \tag{9.38}$$

η οποία είναι η αντίστοιχη σχέση της (9.12). Επειδή $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $w_i = z_i$, για κάθε $i = 1,2,3$, οπότε η αντίστοιχη της (9.13) είναι η

$$-w_1^2 + 4w_2^2 + 6w_3^2 = 1. \tag{9.39}$$

Η ποσότητα $k = 1 \neq 0$ και όλες οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, οπότε σύμφωνα με τη θεωρία της ενότητας 9.2.1, η επιφάνεια που περιγράφεται από την ισότητα στην (9.39) είναι μονόχωνο υπερβολοειδές.

ii) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x} - 6 = 0, \tag{9.40}$$

(αντίστοιχη μορφή εξίσωσης στην (9.11)), όπου $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(\boldsymbol{x}) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, με $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -10 & 8 & 14 \end{pmatrix}^t$. Ο μετασχηματισμός της (9.40) επιτυγχάνεται από έναν ορθογώνιο πίνακα P, ο οποίος κατασκευάζεται με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ και $\lambda_3 = 9$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(3) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 3$. Στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 6$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(6) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2 = 6$, και τέλος, στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 9$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(9) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}^t : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, από τον οποίο επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_3 = 9$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο μεταξύ τους κάθετα. Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή, $P = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό από την (9.6) και από την ισότητα στην (9.5), έχουμε

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

και

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^t P^t AP\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^t diag(3,6,9)\,\boldsymbol{z}.$$

Επίσης, με αντικατάσταση του P έχουμε

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = \boldsymbol{b}^t P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-10 & 8 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 0 & -18\end{pmatrix}.$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην (9.40) με τις παραπάνω ισότητες καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boldsymbol{z}^t\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{pmatrix}6 & 0 & -18\end{pmatrix}\boldsymbol{z} - 6 = 0 \Rightarrow 3z_1^2 + 6z_2^2 + 9z_3^2 + 6z_1 - 18z_3 - 6 = 0, \quad (9.41)$$

η οποία είναι η αντίστοιχη ισότητα της (9.12). Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $w_i = z_i + \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i} \Rightarrow z_i = w_i - \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i}$, για κάθε $i = 1,2,3$, έχουμε $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1 - 1\\ w_2\\ w_3 + 1\end{pmatrix}$. Οπότε αντικαθιστώντας στην (9.41) έχουμε

$$3w_1^2 + 6w_2^2 + 9w_3^2 = 18 \Rightarrow \frac{w_1^2}{6} + \frac{w_2^2}{3} + \frac{w_3^2}{2} = 1. \quad (9.42)$$

Η ισότητα στην (9.42) είναι αντίστοιχη της (9.13) και έχει την ποσότητα $k = 18 \neq 0$ και όλες τις ιδιοτιμές θετικές. Οπότε, σύμφωνα με τη θεωρία της ενότητας 9.2.1, η επιφάνεια που περιγράφεται από την (9.42) είναι ελλειψοειδές.

iii) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} - 1 = 0, \quad (9.43)$$

όπου $A = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής

$q_3(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Για τον μετασχηματισμό της (9.43) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = 6$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(0) = \left\{x_3\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\end{pmatrix}^t : x_3 \in \mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (2 \;\; -2 \;\; -1)^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 0$. Στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(3) = \left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\end{pmatrix}^t : x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad 2 \quad -2)^t$ ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2 = 3$, και στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 6$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(6) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, από τον οποίο επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_3 = (2 \quad 1 \quad 2)^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_3 = 6$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο μεταξύ τους κάθετα. Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

ο οποίος μετατρέπει την τετραγωνική μορφή ως εξής:

$$\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^t P^t A P \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^t diag(0,3,6)\, \boldsymbol{z}.$$

Επειδή υπάρχει μία ιδιοτιμή ίση με μηδέν, σύμφωνα με τη θεωρία, η (9.43) καταλήγει σε εξίσωση ελλειπτικού κυλίνδρου, διότι

$$\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{z}^t P^t A P \boldsymbol{z} - 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{z}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} = 1 \;\Rightarrow\; 3z_2^2 + 6z_3^2 = 1.$$

iv) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x} - 1 = 0, \tag{9.44}$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής

$q_4(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ και $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -12 & -12 & 6 \end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (9.44) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 9$ και $\lambda_2 = 0$ (διπλή ρίζα).

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 9$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(9) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (2 \;\; -1 \;\; 2)^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 9$.

Στη διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(0) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, από όπου επιλέγουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t$ και $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t$, ως ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα της διπλής ιδιοτιμής $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ και $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές, άρα είναι κάθετα (Πρόταση 7.6).

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1, ο πίνακας $P \in M_3(\mathbb{R})$ πρέπει να έχει στήλες ορθογώνια ιδιοδιανύσματα. Επομένως, χρειάζεται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt για τα $\{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$, οπότε βρίσκουμε $\hat{\boldsymbol{x}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \dfrac{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle}{\|\boldsymbol{x}_2\|^2} \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{5} & \dfrac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}^t$.

Διαιρώντας καθένα από τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3$ με το μέτρο τους, ώστε αυτά να είναι μοναδιαία, έχουμε

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} \boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|} \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\|\hat{\boldsymbol{x}}_3\|} \hat{\boldsymbol{x}}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4\sqrt{5}/15 \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}.$$

Για κάθε $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό από την (9.6) και από την ισότητα στην (9.5), έχουμε

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4\sqrt{5}/15 \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

και

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^t P^t AP\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^t diag\left(9,0,0\right)\boldsymbol{z}\,,$$

Επίσης, με αντικατάσταση του P προκύπτει

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = \boldsymbol{b}^t P = \begin{pmatrix} -12 & -12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4\sqrt{5}/15 \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-36}{\sqrt{5}} & \frac{18}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην (9.44) με τις παραπάνω ισότητες καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boldsymbol{z}^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-36}{\sqrt{5}} & \frac{18}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\boldsymbol{z} = 1 \;\Rightarrow\; 9z_1^2 = 1 + \frac{36}{\sqrt{5}}z_2 - \frac{18}{\sqrt{5}}z_3\,. \qquad (9.45)$$

Επειδή υπάρχουν δύο ιδιοτιμές ίσες με μηδέν και η ιδιοτιμή λ_1 είναι η μόνη μη μηδενική, σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς που προτείνονται στην αντίστοιχη θεωρία της ενότητας 9.2.1, έχουμε :

$$w_1 = z_1 + \frac{\beta_1}{2\lambda_1} \Rightarrow w_1 = z_1 \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \frac{\sqrt{5}}{36}w_2 + \frac{w_3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{36} \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Οπότε, αντικαθιστώντας στην (9.45), καταλήγουμε στην εξίσωση παραβολικού κυλίνδρου

$$9w_1^2 = w_2 \;\Rightarrow\; \frac{w_1^2}{(1/9)} = w_2\,.$$

v) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0\,, \qquad (9.46)$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής

$q_5(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Ο μετασχηματισμός της (9.46) επιτυγχάνεται από έναν ορθογώνιο πίνακα P, ο οποίος κατασκευάζεται με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=-2$ και $\lambda_3=10$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-5$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(-5)=\left\{x_2\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\end{pmatrix}^t : x_2\in\mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\end{pmatrix}^t$, ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1=-5$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-2$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(-2)=\left\{x_2\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\end{pmatrix}^t : x_2\in\mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2=(-1 \quad 2 \quad -2)^t$, ως ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_2=-2$, και τέλος, στην ιδιοτιμή $\lambda_3=10$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(10)=\left\{x_3\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}^t : x_3\in\mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_3=(2 \quad 2 \quad 1)^t$, ως ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_3=10$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο μεταξύ τους κάθετα. Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P=\begin{pmatrix}-2/3 & -1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Για κάθε $\boldsymbol{z}=(z_1 \quad z_2 \quad z_3)^t\in\mathbb{R}^{3\times1}$, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό από την (9.6) και από την ισότητα στην (9.5), έχουμε

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{z}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},$$

και

$$\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}^tP^tAP\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^t diag(-5,-2,10)\,\boldsymbol{z}.$$

Οπότε, κάνοντας αντικατάσταση στην (9.46) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boldsymbol{z}^t\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}\boldsymbol{z}=0\Rightarrow -5z_1^2-2z_2^2+10z_3^2=0. \tag{9.47}$$

Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, ο μετασχηματισμός που εφαρμόζουμε είναι $w_i=z_i$, για κάθε $i=1,2,3$, οπότε η (9.47) γράφεται

$$-5w_1^2-2w_2^2+10w_3^2=0. \tag{9.48}$$

Η ισότητα στην (9.48) είναι αντίστοιχη της (9.13), η οποία έχει την ποσότητα $k=0$, δύο αρνητικές ιδιοτιμές και μία θετική, οπότε, σύμφωνα με τη θεωρία της ενότητας 9.2.1, η επιφάνεια που περιγράφεται από την (9.48) είναι ελλειπτικός κώνος. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.11 Να βρείτε το είδος των επόμενων καμπύλων

i) $5x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2-14x_1+2x_2+5=0$

ii) $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-6x_1-14x_2+19=0$

iii) $x_1^2+6x_1x_2+x_2^2+4x_1+4x_2=10$

Απόδειξη : i) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{x}+5=0, \tag{9.49}$$

όπου $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_1(\boldsymbol{x})=5x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2$, για κάθε $\boldsymbol{x}=(x_1\quad x_2)^t\in\mathbb{R}^{2\times1}$ και $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-14 & 2\end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (9.49) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=8$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(2)=\left\{x_1(1\quad 1)^t : x_1\in\mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1=(1\quad 1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1=2$, και στην ιδιοτιμή $\lambda_2=8$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(8)=\left\{x_1(1\quad -1)^t : x_1\in\mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2=(1\quad -1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2=8$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα. Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή,

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Για κάθε $\boldsymbol{z}=(z_1\quad z_2)^t\in\mathbb{R}^{2\times1}$, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό της (9.6) και από την ισότητα στην (9.5), έχουμε

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{z}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix},$$

και

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^t P^t AP\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^t diag\left(2,8\right)\boldsymbol{z}\,,$$

Επίσης, με αντικατάσταση του P, έχουμε

$$(\beta_1 \quad \beta_2) = \boldsymbol{b}^t P = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-14 \quad 2\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{\sqrt{2}} & \frac{-16}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (9.49) τις παραπάνω ισότητες, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boldsymbol{z}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{pmatrix} \frac{-12}{\sqrt{2}} & \frac{-16}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\boldsymbol{z} + 5 = 0 \;\Rightarrow\; 2z_1^2 + 8z_2^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}z_1 - \frac{16}{\sqrt{2}}z_2 + 5 = 0\,. \qquad (9.50)$$

η οποία είναι η αντίστοιχη ισότητα της (9.16). Σύμφωνα με τη θεωρία της ενότητας 9.2.2, επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $w_i = z_i + \frac{\beta_i}{2\lambda_i} \Rightarrow z_i = w_i - \frac{\beta_i}{2\lambda_i}$, για κάθε $i = 1,2$, δηλαδή

$$z_1 = w_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad z_2 = w_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Οπότε, αντικαθιστώντας στην (9.50), καταλήγουμε στην εξίσωση της έλλειψης

$$2w_1^2 + 8w_2^2 = 8 \Rightarrow \frac{w_1^2}{4} + \frac{w_2^2}{1} = 1\,.$$

ii) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{x} + 19 = 0\,, \qquad (9.51)$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2)^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $\boldsymbol{b} = (-6 \quad -14)^t$. Για τον μετασχηματισμό της (9.51) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 2$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V\left(0\right) = \left\{x_1(1 \quad 1)^t : x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad 1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 0$, και στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V\left(2\right) = \left\{x_1(1 \quad -1)^t : x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad -1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα. Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Για κάθε $\boldsymbol{z} = (z_1 \quad z_2)^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό της (9.6) και από την ισότητα στην (9.5), έχουμε

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

και

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^t P^t AP\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^t diag\left(0,2\right)\boldsymbol{z}\,.$$

Επίσης με αντικατάσταση του P έχουμε

$$(\beta_1 \quad \beta_2) = \boldsymbol{b}^t P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -6 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (9.51) τις παραπάνω ισότητες, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boldsymbol{z}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{pmatrix} \frac{-20}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\boldsymbol{z} + 19 = 0 \Rightarrow 2z_2^2 - \frac{20}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{8}{\sqrt{2}}z_2 + 19 = 0\,. \qquad (9.52)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία της ενότητας 9.2.2, επειδή η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$, θέτουμε

$$w_2 = z_2 + \frac{\beta_2}{2\lambda_2} \Rightarrow z_2 = w_2 - \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \text{και} \quad w_1 = \frac{20}{\sqrt{2}}z_1 - 15 \Rightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{20}w_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\,.$$

Οπότε, αντικαθιστώντας τα z_1, z_2 στην (9.52) καταλήγουμε στην εξίσωση της παραβολής

$$2w_2^2 = w_1 \Rightarrow \frac{w_2^2}{(1/2)} = w_1\,.$$

iii) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{x} - 10 = 0\,, \qquad (9.53)$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2)^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $\boldsymbol{b} = (4 \quad 4)^t$. Για τον μετασχηματισμό της (9.53) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 4$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(-2) = \{x_1(1 \quad -1)^t : x_1 \in \mathbb{R}\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad -1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = -2$, και στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ αντιστοιχεί ο ιδιόχωρος $V(4) = \{x_1(1 \quad 1)^t : x_1 \in \mathbb{R}\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad 1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 4$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα. Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για κάθε $\boldsymbol{z} = (z_1 \quad z_2)^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό της (9.6) και από την ισότητα στην (9.5), έχουμε

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

και

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^t P^t A P\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^t diag(-2,4)\boldsymbol{z},$$

Επίσης, με αντικατάσταση του P έχουμε

$$(\beta_1 \quad \beta_2) = \boldsymbol{b}^t P = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (9.53) τις παραπάνω ισότητες, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boldsymbol{z}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\boldsymbol{z} - 10 = 0 \Rightarrow -2z_1^2 + 4z_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}z_2 - 10 = 0. \tag{9.54}$$

Επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, σύμφωνα με τη θεωρία της ενότητας 9.2.2, θέτουμε

$w_i = z_i + \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i} \Rightarrow z_i = w_i - \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i}$, για κάθε $i = 1,2$, δηλαδή

$$z_1 = w_1 \quad \text{και} \quad z_2 = w_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Οπότε, αντικαθιστώντας τα z_1, z_2 στην (9.54), καταλήγουμε στην εξίσωση της υπερβολής

$$-2w_1^2 + 4w_2^2 = 12 \Rightarrow \frac{w_2^2}{3} - \frac{w_1^2}{6} = 1 .$$ ◆◆◆

Παράδειγμα 9.12 Μία επιχείρηση παράγει τρεις τύπους ομοειδών αγαθών. Υποθέτουμε ότι το κέρδος της συνδέεται με τις παραγόμενες ποσότητες των τριών αγαθών και δίνεται από τη σχέση

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + 90x_1 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 ,$$

όπου με $f(x_1, x_2, x_3)$ συμβολίζεται το κέρδος της επιχείρησης σε χρηματικές μονάδες και με x_i, ($i = 1,2,3$) εκφράζονται οι ποσότητες των τριών αγαθών. Ποιο πρέπει να είναι το επίπεδο παραγωγής, ώστε το συνολικό κέρδος να είναι μέγιστο;

Απόδειξη : Αν η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + 90x_1 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2$ έχει ακρότατα, αυτά θα βρίσκονται στα σημεία όπου μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης. Άρα, αρκεί να λύσουμε το ομογενές σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -6x_1 + 3x_2 + 90 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 \qquad &= 0 \\ -6x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Έτσι, η μοναδική λύση του συστήματος είναι $x_1^0 = 20$, $x_2^0 = 10$ και $x_3^0 = 0$. Σχηματίζουμε τον Hessian πίνακα της συνάρτησης στο σημείο$(20,10,0)$, ο οποίος είναι:

$$H(20,10,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} .$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.3, προκύπτει ότι, ο πίνακας $H(20,10,0)$ είναι αρνητικά ορισμένος, διότι ισχύει

$$\det H_1 = -6 < 0,\ \det H_2 = \det\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = 27 > 0,\ \det H = \det\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -162 < 0$$

.

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.4 (i), η συνάρτηση κέρδους $f(x_1, x_2, x_3)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\left(x_1^{\,0}, x_2^{\,0}, x_3^{\,0}\right) = (20,10,0)$. Έτσι, η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδος, το οποίο είναι μεγαλύτερο από κάθε άλλο που αντιστοιχεί σε οποιονδήποτε άλλο συνδυασμό παραγόμενων ποσοτήτων, όταν οι παραγόμενες ποσότητες των τριών αγαθών είναι 20, 10, 0, αντίστοιχα. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.13 Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις έχουν ακρότατα και να τα χαρακτηρίσετε

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 - 2x_3 - 7x_1 + 12$

ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad f(x_1, x_2, x_3) = 12 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + 30x_1$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad f(x_1, x_2, x_3) = 10 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_1x_3$

Απόδειξη : i) Αν η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 - 2x_3 - 7x_1 + 12$ έχει ακρότατα, αυτά θα βρίσκονται στα σημεία όπου μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης. Άρα, αρκεί να λύσουμε το ομογενές σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 7 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 \qquad &= 0 \\ 2x_3 - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Έτσι, η μοναδική λύση του συστήματος είναι $x_1^{\,0} = 4$, $x_2^{\,0} = -1$ και $x_3^{\,0} = 1$.

Σχηματίζουμε τον Hessian πίνακα της συνάρτησης f στο σημείο $(4, -1, 1)$, ο οποίος από την (9.18) είναι:

$$H(4,-1,1)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.3, προκύπτει ότι ο πίνακας $H(4,-1,1)$ είναι θετικά ορισμένος, διότι ισχύει

$$\det H_1 = 2 > 0,\ \det H_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 > 0,\ \det H = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 14 > 0.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.4 (ii), η συνάρτηση $f(x_1,x_2,x_3)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $\left(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0\right) = (4,-1,1)$.

ii) Αν η συνάρτηση $f(x_1,x_2,x_3) = 12 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1 x_2 + 30x_1$ έχει ακρότατα, αυτά θα βρίσκονται στα σημεία όπου μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης. Άρα, αρκεί να λύσουμε το ομογενές σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 30 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 \qquad &= 0 \\ -2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Έτσι, η μοναδική λύση του συστήματος είναι $x_1{}^0 = 20$, $x_2{}^0 = 10$ και $x_3{}^0 = 0$. Σχηματίζουμε τον Hessian πίνακα της συνάρτησης στο σημείο$(20,10,0)$, ο οποίος είναι:

$$H(20,10,0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.3, προκύπτει ότι, ο πίνακας $H(20,10,0)$ είναι αρνητικά ορισμένος, διότι ισχύει

$$\det H_1 = -2 < 0,\ \det H_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 > 0,\ \det H = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -6 < 0\,.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.4 (i), η συνάρτηση $f(x_1,x_2,x_3)$ έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $\left(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0\right) = (20,10,0)$.

iii) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ f(x_1,x_2,x_3) = 10 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_1x_3$ έχει ακρότατα, αυτά θα βρίσκονται στα σημεία όπου μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης. Άρα, χρειάζεται να λύσουμε το ομογενές σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2x_1 + x_3 + 1 &= 0 \\ -2x_2 + 1 \qquad &= 0 \\ x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Έτσι, η μοναδική λύση του συστήματος είναι $x_1{}^0 = \dfrac{2}{5},\ \ x_2{}^0 = \dfrac{1}{2}$ και $x_3{}^0 = -\dfrac{1}{5}$.

Σχηματίζουμε τον Hessian πίνακα της συνάρτησης στο σημείο $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$, ο οποίος είναι:

$$H\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 9.4, όταν δεν εφαρμόζεται το (i) ή το (ii) της Πρότασης 9.3, ο συμμετρικός πίνακας είναι αόριστος. Πράγματι, ο πίνακας $H\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$ είναι αόριστος, διότι ισχύει

$$\det H_1 = -2 < 0,\ \det H_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 > 0,\ \det H = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 10 > 0\,.$$

Δηλαδή, τα πρόσημα των οριζουσών δεν ακολουθούν τη σειρά που απαιτείται από το (ii) της Πρότασης 9.3.

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.4 (iii), η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3)$ **δεν** παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\left(x_1^{\,0}, x_2^{\,0}, x_3^{\,0}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right)$. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.14 Μία βιομηχανία κατασκευάζει ημερήσια δύο τύπους μηχανών x_1 και x_2. Η σχέση κόστους είναι :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_2$$

Αν η βιομηχανία είναι υποχρεωμένη να κατασκευάζει ημερήσια συνολικά 8 μηχανές, να βρεθεί ο αριθμός των μηχανών από κάθε τύπο που πρέπει να κατασκευαστούν , ώστε να έχει το ελάχιστο κόστος.

Απόδειξη : Επειδή η βιομηχανία κατασκευάζει ημερήσια συνολικά 8 μηχανές, αυτό σημαίνει ότι στην παραγωγή υπάρχει περιορισμός $x_1 + x_2 = 8$. Λύνουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Για τη συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_2$, θεωρούμε ως συνάρτηση περιορισμού $g_1\left(x_1, x_2\right) = x_1 + x_2 - 8$. Όπως στην (9.19) ορίζεται η συνάρτηση Lagrange να είναι

$$F\left(x_1, x_2, \lambda_1\right) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_2 + \lambda_1\left(x_1 + x_2 - 8\right).$$

Για να υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης f, πρέπει να υπολογισθεί ένα σημείο από την (9.21), στο οποίο να ικανοποιούνται μία από τις συνθήκες της Πρότασης 9.5. Το σημείο προκύπτει από τη λύση του ομογενούς συστήματος

$$\frac{\partial F\left(x_1, x_2, \lambda_1\right)}{\partial x_i} = 0\,, \quad \text{για κάθε } i = 1,2 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial F\left(x_1, x_2, \lambda_1\right)}{\partial \lambda_1} = 0\,,$$

δηλαδή,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(x_1,x_2,\lambda_1)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial F(x_1,x_2,\lambda_1)}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial F(x_1,x_2,\lambda_1)}{\partial \lambda_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \lambda_1 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + \lambda_1 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 8 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι $x_1^{\;0} = 5$, $x_2^{\;0} = 3$ και $\lambda_1^0 = -7$.

Ο πίνακας από την (9.20) είναι

$$\Delta_1(5,3,-7) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή στο παράδειγμα έχουμε $n = 2$, $m = 1$, χρειάζεται να υπολογισθεί μόνο η ορίζουσα του πίνακα $\Delta_1(5,3,-7)$, η οποία είναι $\det\left(\Delta_1(5,3,-7)\right) = -8 < 0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.5 (i) υποπερίπτωση (β), συμπεραίνουμε ότι, στο σημείο $\left(x_1^{\;0}, x_2^{\;0}\right) = (5,3)$ η συνάρτηση κόστους $f(x_1,x_2)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Άρα, η βιομηχανία έχει το ελάχιστο κόστος κατασκευής, μόνο όταν οι παραγόμενες ποσότητες μηχανών είναι 5 και 3, αντίστοιχα. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.15 Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις έχουν ακρότατα :

i) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 12x_1 + 12x_2 + 8x_3 - 50$

με τον περιορισμό $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

ii) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 2)^2 + 3(x_2 - 1)^2 - 2(x_1 - 4)(x_2 + 1)$

με τους περιορισμούς $3x_1 + 2x_2 = 0$ και $4x_1 + 2x_3 = 0$.

Απόδειξη : i) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Για τη συνάρτηση $f = f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 12x_1 + 12x_2 + 8x_3 - 50$, θεωρούμε ως συνάρτηση περιορισμού $g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Όπως στην (9.19) ορίζεται η συνάρτηση Lagrange να είναι

$$F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 12x_1 + 12x_2 + 8x_3 - 50 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3).$$

Για να υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης f, πρέπει να υπολογισθεί ένα σημείο από την (9.21), στο οποίο να ικανοποιούνται μία από τις συνθήκες της Πρότασης 9.5. Το σημείο προκύπτει από τη λύση του ομογενούς συστήματος

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_i}=0, \text{ για κάθε } i=1,2,3 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)}{\partial \lambda_1}=0,$$

δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)}{\partial x_3}=0 \\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)}{\partial \lambda_1}=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x_1+12+\lambda_1=0 \\ -2x_2+12+\lambda_1=0 \\ -2x_3+8+\lambda_1=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{array}\right\}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι $x_1^0=x_2^0=\frac{2}{3}$, $x_3^0=-\frac{4}{3}$, $\lambda_1^0=-\frac{32}{3}$.

Ο πίνακας από την (9.20) είναι

$$\Delta_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{32}{3}\right)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή στο παράδειγμα έχουμε $n=3$, $m=1$, χρειάζεται να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $\Delta_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{32}{3}\right)$, η οποία είναι $\det\left(\Delta_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{32}{3}\right)\right)=-12<0$ και η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τη διαγραφή της 1ης στήλης και 1ης γραμμής του πίνακα $\Delta_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{32}{3}\right)$, η οποία είναι

$D_2=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=4>0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.5 (ii) υποπερίπτωση (β), συμπεραίνουμε ότι, στο σημείο $(x_1^0,x_2^0,x_3^0)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

ii) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Για τη συνάρτηση $f = f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-2)^2 + 3(x_2-1)^2 - 2(x_1-4)(x_2+1)$, θεωρούμε ως συναρτήσεις περιορισμών $g_1(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 + 2x_2$, $g_2(x_1,x_2,x_3) = 4x_1 + 2x_3$. Όπως στην (9.19) ορίζεται η συνάρτηση Lagrange να είναι

$$F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2) = (x_1-2)^2 + 3(x_2-1)^2 - 2(x_1-4)(x_2+1) + \lambda_1(3x_1+2x_2) + \lambda_2(4x_1+2x_3)$$

Για να υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης f, πρέπει να υπολογισθεί ένα σημείο από την (9.21), στο οποίο να ικανοποιούνται μία από τις συνθήκες της Πρότασης 9.5. Το σημείο προκύπτει από τη λύση του ομογενούς συστήματος

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_j} = 0, \quad \text{για κάθε } i = 1,2,3, \ j = 1,2,$$

δηλαδή,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_2} &= 0 \\
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1} &= 0 \\
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} &= 0
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}
&2x_1 - 2x_2 - 6 + 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\
&-2x_1 + 6x_2 + 2 + 2\lambda_1 = 0 \\
&2\lambda_2 = 0 \\
&3x_1 + 2x_2 = 0 \\
&4x_1 + 2x_3 = 0
\end{aligned}\right\}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι

$$x_1^0 = \frac{18}{43}, \quad x_2^0 = -\frac{27}{43}, \quad x_3^0 = -\frac{36}{43}, \quad \lambda_1^0 = \frac{56}{43}, \quad \lambda_2^0 = 0.$$

Ο πίνακας από την (9.20) είναι

$$\Delta_1\left(\frac{18}{43},-\frac{27}{43},-\frac{36}{43},\frac{56}{43},0\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή στο παράδειγμα έχουμε $n = 3$, $m = 2$, χρειάζεται να υπολογισθεί μόνο η ορίζουσα του πίνακα $\Delta_1\left(\frac{18}{43},-\frac{27}{43},-\frac{36}{43},\frac{56}{43},0\right)$, η οποία είναι

$\det\left(\Delta_1\left(\frac{18}{43},-\frac{27}{43},-\frac{36}{43},\frac{56}{43},0\right)\right)=344>0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.5 (i) υποπερίπτωση (α), συμπεραίνουμε ότι, στο σημείο $\left(x_1^{\,0},x_2^{\,0},x_3^{\,0}\right)=\left(\frac{18}{43},-\frac{27}{43},-\frac{36}{43}\right)$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. ♦♦♦

Παράδειγμα 9.16 Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\2&2\end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε

i) μία ιδιάζουσα ανάλυση του πίνακα A, και

ii) το γενικευμένο αντίστροφο A^{+} πίνακα του A.

Απόδειξη : i) Η ιδιάζουσα ανάλυση είναι η παραγοντοποίηση του πίνακα A στη μορφή που περιγράφεται στην (9.28), δηλαδή, $A=U\Sigma V^{t}$, όπου οι πίνακες U,V είναι ορθογώνιοι πίνακες και υπολογίζονται από την (9.30) και ο πίνακας Σ έχει ως διαγώνια στοιχεία τις ιδιάζουσες τιμές, (Πρόταση 9.7). Η μέθοδος που ακολουθείται είναι :

α) υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $A^{t}A$, διότι :

-- σύμφωνα με τον Ορισμό 9.5, οι ιδιάζουσες τιμές είναι οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $A^{t}A$, και

-- ο πίνακας V έχει στήλες τα ορθογώνια διανύσματα που προκύπτουν από την ορθοκανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων του $A^{t}A$

β) υπολογισμός ορθοκανονικής βάσης με τόσα διανύσματα όσες οι γραμμές του πίνακα A. Εδώ στο παράδειγμα απαιτούνται τρία διανύσματα, διότι τα διανύσματα της βάσης είναι οι στήλες του πίνακα U. Από την (9.29), το πλήθος των μη μηδενικών διανυσμάτων, που υπολογίζονται, ισούται με το βαθμό του πίνακα A. Συνεπώς, αν τα διανύσματα είναι λιγότερα από το πλήθος των γραμμών του A, τότε επεκτείνουμε αυτά τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα σε μία ορθοκανονική βάση.

Ο συμμετρικός πίνακας $A^{t}A=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_{A^{t}A}(\lambda)=\lambda(\lambda-18)$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=18$ και $\lambda_2=0$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=18$, από $(A^{t}A-18I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, προκύπτει ομογενές σύστημα, η λύση του οποίου είναι ο ιδιόχωρος $V(18)=\left\{x_1(1\quad 1)^{t}\,:\,x_1\in\mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad 1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 18$, και για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$, από $A^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, προκύπτει ομογενές σύστημα, η λύση του οποίου είναι ο ιδιόχωρος $V(0) = \{x_1(1 \quad -1)^t : x_1 \in \mathbb{R}\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad -1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 0$.

Οι ιδιάζουσες τιμές του A είναι

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3\sqrt{2}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 0. \tag{9.55}$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του πίνακα $A^t A$ είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα (Πρόταση 7.6). Επομένως, διαιρούμε το κάθε ιδιοδιάνυσμα με το μέτρο του, οπότε τα διανύσματα

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)^t \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -1)^t \tag{9.56}$$

είναι ορθογώνια, και τοποθετούνται ως στήλες στον πίνακα V, άρα

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9.57}$$

Επειδή ο βαθμός του A είναι $r(A) = 1$, από την (9.29) υπολογίζουμε ένα διάνυσμα

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1 \quad 2 \quad 2)^t.$$

Επειδή ο ορθογώνιος πίνακας U πρέπει να είναι τύπου 3×3, επεκτείνουμε σε μία βάση $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, όπου $\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \quad 1 \quad 0)^t$ και $\boldsymbol{u}_3 = \frac{\sqrt{5}}{15}(2 \quad 4 \quad -5)^t$, τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ πρέπει να είναι κάθετα στο $\boldsymbol{u}_1$ και μοναδιαία (Παράδειγμα 6.8) Συνεπώς, από την (9.30), έχουμε :

$$U = (\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & -\sqrt{5}/3 \end{pmatrix} \tag{9.58}$$

Η ισότητα στην (9.28) επαληθεύεται, αν αντικαταστήσουμε τους ορθογώνιους πίνακες από τις (9.57), (9.58) και τον πίνακα $\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Δηλαδή η ιδιάζουσα ανάλυση του πίνακα A είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & -\sqrt{5}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

ii) Ο γενικευμένος αντίστροφος πίνακας του A υπολογίζεται από την (9.36),

$$A^{+} = V_k \Delta^{-1} U_k^t, \tag{9.59}$$

όπου $\Delta = 3\sqrt{2}$, διότι χρησιμοποιούνται μόνο οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του A. Από την (9.33), κατασκευάζεται ο ορθογώνιος πίνακας U_k, ο οποίος προκύπτει από τον ορθογώνιο πίνακα U της (9.58) με κατάλληλη διαμέριση, όπου χρησιμοποιούνται τόσες πρώτες στήλες του U όσες ο βαθμός του πίνακα A, άρα

$$U_k = \boldsymbol{u}_1 \tag{9.60}$$

Επίσης, από την (9.34), κατασκευάζεται ο ορθογώνιος πίνακας V_k, ο οποίος προκύπτει από τη διαμέριση του ορθογωνίου πίνακα V της (9.57), όπου χρησιμοποιούνται τόσες πρώτες στήλες του V όσες ο βαθμός του πίνακα A, άρα

$$V_k = \boldsymbol{v}_1 \tag{9.61}$$

Με αντικατάσταση των πινάκων στην (9.59) από τους πίνακες των ισοτήτων στις (9.60) και (9.61), καταλήγουμε στο γενικευμένο αντίστροφο πίνακα του A, που είναι :

$$A^{+} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/18 & 1/9 & 1/9 \\ 1/18 & 1/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$ ◆◆◆

Εφαρμογή 9.1 *Έστω ότι ο συμμετρικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ έχει όλες τις ιδιοτιμές θετικές. Να αποδείξετε ότι :*

i) *η τετραγωνική μορφή $\boldsymbol{x}^t A^{-1} \boldsymbol{x}$ είναι θετικά ορισμένη, για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$*

ii) *αν ο συμμετρικός πίνακας* $B \in M_n(\mathbb{R})$ *έχει όλες τις ιδιοτιμές θετικές, τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα* $A+B$ *είναι όλες θετικές*

iii) *υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* $C \in M_n(\mathbb{R})$ *τέτοιος ώστε* $A = CC^t$.

Απόδειξη : i) Σύμφωνα με την Πρόταση 7.1, ισχύει $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Επιπλέον, από την υπόθεση όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές, άρα $\det A > 0$, από όπου είναι φανερό ότι, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς, για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, έχει έννοια η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $\boldsymbol{x}^t A^{-1} \boldsymbol{x}$. Επιπλέον, αν $\lambda_i > 0$ είναι ιδιοτιμή του A, τότε λ_i^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1} (Πόρισμα 7.3) και προφανώς ισχύει $\lambda_i^{-1} > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Επειδή όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A^{-1} είναι θετικοί αριθμοί, ο πίνακας A^{-1} είναι θετικά ορισμένος (Πρόταση 9.2 (i)), οπότε και η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη.

ii) Επειδή όλες οι ιδιοτιμές των πινάκων $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικές, οι πίνακες είναι θετικά ορισμένοι (Πρόταση 9.2 (i)). Άρα οι αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές είναι θετικά ορισμένες και κατά συνέπεια σύμφωνα με τον Ορισμό 9.4 (i), για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ισχύουν :

$$q_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} > 0 \qquad \text{και} \qquad q_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t B \boldsymbol{x} > 0 \tag{9.62}$$

Για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ από την (9.62) μπορούμε να γράψουμε

$$q_3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t (A+B) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^t B \boldsymbol{x} > 0 .$$

Συνεπώς, η $q_3(\boldsymbol{x})$ είναι θετικά ορισμένη, άρα και ο αντίστοιχος πίνακας $A+B$ είναι θετικά ορισμένος. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα (Πρόταση 9.2 (i)).

iii) Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός με θετικές ιδιοτιμές, υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P, τέτοιος ώστε

$$A = P \Delta P^t , \tag{9.63}$$

όπου $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, με $\lambda_i > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ (Πρόταση 9.1).

Γράφοντας $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) = \Delta_1 \Delta_1 = \Delta_1^2$, θέτουμε

$$C = \Delta_1 P^t . \tag{9.64}$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος.

Ο διαγώνιος πίνακας Δ_1, από την κατασκευή του, είναι θετικά ορισμένος, και άρα $\det \Delta_1 > 0$.

Ο πίνακας P είναι ορθογώνιος, άρα από τις ιδιότητες των ορθογωνίων πινάκων, (Πρόταση 6.8), ισχύει $P^t = P^{-1}$, $\det P \neq 0$ και $\det P^t = \det P^{-1} \neq 0$. Συνδυάζοντας την ιδιότητα των οριζουσών, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, με τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε

$$\det C = \det \Delta_1 \cdot \det P^t \neq 0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι, ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος.

Επιπλέον, αντικαθιστώντας τον πίνακα C από την (9.64), εφαρμόζοντας τις ιδιότητες $(A^t)^t = A$, (Πρόταση 1.2 (i)) $(AB)^t = B^t A^t$ (Πρόταση 1.3 (vi)) και χρησιμοποιώντας τη μορφή του πίνακα $\Delta = \Delta_1^2$ και την (9.63), καταλήγουμε στη σχέση :

$$C^t C = (\Delta_1 P^t)^t \Delta_1 P^t = P\Delta_1^t \Delta_1 P^t = P\Delta_1 \Delta_1 P^t = P\Delta_1^2 P^t = P\Delta P^t = A$$

Άρα, ισχύει $A = C^t C$, όπου C ο αντιστρέψιμος πίνακας που δίνεται από την (9.64).

◆◆◆

Εφαρμογή 9.2 *Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ με $m \leq n$ και $r(A) = m$. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A παραγοντοποιείται στη μορφή*

$$A = PQ, \tag{9.65}$$

όπου ο πίνακας $P \in M_m(\mathbb{R})$ είναι θετικά ορισμένος και ο πίνακας $Q \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ έχει γραμμές ορθογώνια διανύσματα.

Απόδειξη : Σύμφωνα με την Πρόταση 9.7, υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες $U \in M_m(\mathbb{R})$, $V \in M_n(\mathbb{R})$, τέτοιοι ώστε

$$A = U\Sigma V^t. \tag{9.66}$$

Επειδή $r(A) = m$, ο πίνακας Σ έχει τη μορφή $\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta_{m\times m} & \mathbb{O}_{m\times(n-m)} \end{pmatrix}$, όπου $\Delta = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$, $\sigma_i \neq 0$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A. Στον πίνακα V θεωρούμε τη διαμέριση $V = \begin{pmatrix} V_m & V_{n-m} \end{pmatrix}$, οπότε αντικαθιστώντας στην (9.66) τους πίνακες Σ, V έχουμε

$$A = U\begin{pmatrix} \Delta_{m\times m} & \mathbb{O}_{m\times(n-m)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_m & V_{n-m} \end{pmatrix}^t = U\Delta V_m^t = U\Delta(U^t U)V_m^t = (U\Delta U^t)(UV_m^t). \tag{9.67}$$

Θέτουμε

$$P = U\Delta U^t \quad \text{και} \quad Q = UV_m^t. \tag{9.68}$$

Επειδή U είναι ορθογώνιος πίνακας, και ο πίνακας Δ είναι διαγώνιος θετικά ορισμένος, κάνοντας πράξεις διαπιστώνουμε ότι, ο πίνακας P είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Πράγματι, επειδή ο πίνακας Δ είναι διαγώνιος και από τις ιδιότητες των αναστρόφων πινάκων (Πρόταση 1.2 (i) και Πρόταση 1.3 (vi)), έχουμε

$$P^t = (U\Delta U^t)^t = U\Delta^t U^t = U\Delta U^t = P,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι, ο πίνακας P είναι συμμετρικός.

Επιπλέον, επειδή $\Delta = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ με $\sigma_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$, για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ μπορούμε να γράψουμε

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^t (U\Delta U^t)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^t U)\Delta(U^t \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}^t \Delta \boldsymbol{y} > 0$$

όπου $\boldsymbol{y} = U^t \boldsymbol{x}$. Άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 9.4, ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q(\boldsymbol{x})$ είναι θετικά ορισμένος.

Επίσης, επειδή V είναι ορθογώνιος πίνακας, είναι φανερό ότι και για τον πίνακα που προκύπτει από τη διαμέριση του V ισχύει $V_m^t V_m = I$. Ακόμη, ο πίνακας U είναι ορθογώνιος, οπότε για τον πίνακα Q, από την (9.68), διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$QQ^t = UV_m^t (UV_m^t)^t = UV_m^t V_m U^t = U(V_m^t V_m)U^t = UU^t = I$$

και άρα οι γραμμές του Q είναι ορθογώνια διανύσματα.

Επομένως, οι πίνακες στην (9.68) έχουν τις ιδιότητες που απαιτούνται από την παραγοντοποίηση και η ισότητα (9.67) επαληθεύει την (9.65).

Η ισότητα στην (9.65) ονομάζεται **πολική παραγοντοποίηση** (polar decomposition) του πίνακα A. ◆◆◆

Εφαρμογή 9.3 *Για έναν πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ο δείκτης ή αριθμός κατάστασης ορίζεται να είναι*

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^t A)}{\lambda_{\min}(A^t A)}} \tag{9.69}$$

και συμβολίζεται με $c.n(A)$.

i) *Να αποδείξετε ότι ισχύουν τα επόμενα :*

a. $c.n(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$ (9.70)

b. *Ο δείκτης κατάστασης του μοναδιαίου πίνακα ισούται με 1, ενώ ενός μη αντιστρέψιμου είναι πολύ μεγάλος αριθμός.*[1]

[1] Ο **δείκτης** ή **αριθμός κατάστασης** (condition number) δείχνει «πόσο κοντά» είναι ένας τετραγωνικός πίνακας στο να μην είναι αντιστρέψιμος.

ii) *Έστω οι πίνακες* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *και* $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Να υπολογίσετε το δείκτη κατάστασης των πινάκων* A , B.

Απόδειξη : i) a. Σύμφωνα με τον Ορισμό 9.5, οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $A^t A$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A. Συνεπώς, από την (9.69) ο δείκτης κατάστασης ισούται με $c.n(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$, όπου $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A.

b. Είναι φανερό ότι, όλες οι ιδιοτιμές και ιδιάζουσες τιμές του μοναδιαίου πίνακα ταυτίζονται με τη μονάδα, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεσο από την (9.70).

Στην περίπτωση όπου ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ δεν είναι αντιστρέψιμος ισχύει $r(A) < n$. Άρα οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές είναι λιγότερες από n, οπότε κάποια ιδιάζουσα τιμή του A ισούται με μηδέν, έστω $\sigma_n = 0$. Επομένως, από την (9.70) είναι άμεσο το συμπέρασμα.

ii) • Ο συμμετρικός πίνακας $A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$. Επομένως, οι ιδιάζουσες τιμές είναι $\sigma_1(A) = \sqrt{3}$ και $\sigma_2(A) = \sqrt{2}$, οπότε από την (9.70) έχουμε

$$c.n(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_2(A)} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2247 .$$

• Ο συμμετρικός πίνακας $B^t B = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 10 + \sqrt{88}$, $\lambda_2 = 10 - \sqrt{88}$ και $\lambda_3 = 0$. Επομένως, οι ιδιάζουσες τιμές είναι $\sigma_1(B) = \sqrt{10 + \sqrt{88}}$, $\sigma_2(B) = \sqrt{10 - \sqrt{88}}$ και $\sigma_3(B) = 0$. Συνεπώς, ο δείκτης κατάστασης είναι

$$c.n(B) = \frac{\sigma_1(B)}{\sigma_3(B)} = \sqrt{\frac{10 + \sqrt{88}}{0}} = \infty .$$

Ο δείκτης κατάστασης είναι πολύ μεγάλος αριθμός, άρα από τη θεωρία ο πίνακας B δεν είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, ο πίνακας B δεν είναι αντιστρέψιμος, διότι $\det B = 0$.

◆◆◆

Εφαρμογή 9.4 *Έστω μία τετραγωνική μορφή* $q(\boldsymbol{x})$ *του* $\mathbb{R}^n$ *, όπου* $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *και* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *ο αντίστοιχος πίνακας της* $q(\boldsymbol{x})$. *Να αποδείξετε ότι ισχύει*

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x}, \tag{9.71}$$

όπου $\dfrac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\dfrac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \quad \dfrac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \dfrac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)^t$.

Απόδειξη : Έστω ότι η τετραγωνική μορφή $q(\boldsymbol{x})$ έχει τη μορφή που δίνεται στην (9.1), δηλαδή

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\ + \cdots \\ + a_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

Οι μερικές παράγωγοι της $q(\boldsymbol{x})$ ως προς x_i, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} &= 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_n \\ \frac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} &= 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} &= 2a_{1n}x_1 + 2a_{2n}x_2 + 2a_{3n}x_3 + \cdots + 2a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{9.72}$$

Το σύστημα των εξισώσεων στην (9.72) γράφεται με μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & \cdots & 2a_{1n} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} & \cdots & 2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_{1n} & 2a_{2n} & 2a_{3n} & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2A\boldsymbol{x}, \tag{9.73}$$

όπου $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της αντίστοιχης τετραγωνικής μορφής και $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Η ζητούμενη ισότητα $\dfrac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x}$ συμπεραίνεται από την (9.73). ♦♦♦

Εφαρμογή 9.5 *Έστω ότι οι παρατηρήσεις ενός στατιστικού δείγματος παρουσιάζονται με μορφή καρτεσιανών συντεταγμένων* (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, *όπου* x_i *είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και* y_i *είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Συχνά απαιτείται η εύρεση μίας καμπύλης που διέρχεται όσο το δυνατό «πιο κοντά» από τα σημεία* (x_i, y_i). *Μία καλή προσέγγιση είναι η πολυωνυμική καμπύλη*

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-1} x^{m-1}, \tag{9.74}$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$ *είναι οι άγνωστοι συντελεστές της καμπύλης.*

i) *Να αποδείξετε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:*

a. Αν $m = n$ *και* x_i *είναι όλα διαφορετικά, τότε υπάρχει μοναδική καμπύλη της μορφής* (9.74), *που διέρχεται από τα σημεία αυτά.*

b. *Αν* $m < n$, *τότε τα σημεία* (x_i, y_i) *δεν ανήκουν στην καμπύλη.*

ii) *Να γίνει η προσέγγιση των παρατηρήσεων* (x_i, y_i) *από μία ευθεία, (απλή γραμμική παλινδρόμηση).*

Απόδειξη : i) a. Αντικαθιστώντας κάθε σημείο (x_i, y_i) στην (9.74), διαμορφώνεται το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \tag{9.75}$$

όπου

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)^t \quad \text{και} \quad \boldsymbol{a} = (a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1})^t.$$

Επειδή όλα τα x_i είναι διαφορετικά, ισχύει ότι $\det V = \det V^t \neq 0$, (για τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα V^t, βλέπε Παράδειγμα 2.6 και Άσκηση 2.4.11). Οπότε, το σύστημα στην (9.75) έχει μοναδική λύση (Πρόταση 2.5). Άρα, υπάρχει μοναδική καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία (x_i, y_i), για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, και οι συντελεστές της καμπύλης είναι η λύση του συστήματος (9.75).

b. Αν $m < n$, τότε το σύστημα, που διαμορφώνεται αντίστοιχο του (9.75), έχει πίνακα τύπου $n \times m$ και ο βαθμός του πίνακα αυτού είναι μικρότερος ή ίσος με το m, από όπου είναι φανερό ότι όλα τα σημεία (x_i, y_i) δεν ανήκουν στην καμπύλη, (βλέπε Εφαρμογή 3.4).

ii) Από το ερώτημα (i)-(b), για $m = 2$ και $n > 2$, προκύπτει ότι οι παρατηρήσεις (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, δεν ανήκουν όλες στην ευθεία (9.74). Έστω ότι κάποιο (x_i, y_i) δεν ανήκει στην ευθεία, οπότε στην τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i αντιστοιχούν δύο τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής, δηλαδή μία της παρατήρησης του δείγματος y_i και μία τιμή που υπολογίζεται από την προσεγγιστική ευθεία και συμβολίζεται $\hat{y}_i$. Συνεπώς, ως διαφορά των δύο τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής y_i και $\hat{y}_i$ εκτιμάται κάποιο σφάλμα e_i. Για να πετύχουμε την καλύτερη προσέγγιση ανάμεσα στις παρατηρήσεις και την ευθεία

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x \tag{9.76}$$

που τις προσεγγίζει, χρησιμοποιούμε το κριτήριο «***ελαχίστων τετραγώνων***», με το οποίο απαιτείται το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων e_i να είναι ελάχιστο, δηλαδή ,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = f(a_0, a_1)\,. \tag{9.77}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.4 (ii), η συνάρτηση $f(a_0, a_1)$ έχει ελάχιστη τιμή, όταν η λύση του συστήματος

$$\frac{\partial f(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 0, \qquad \frac{\partial f(a_0, a_1)}{\partial a_1} = 0, \tag{9.78}$$

έστω η $\hat{a}_0, \hat{a}_1$, καθιστά τον Hessian πίνακα της συνάρτησης

$$H(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\hat{a}_0, \hat{a}_1)}{\partial a_0^2} & \dfrac{\partial^2 f(\hat{a}_0, \hat{a}_1)}{\partial a_0 \partial a_1} \\ \dfrac{\partial^2 f(\hat{a}_0, \hat{a}_1)}{\partial a_0 \partial a_1} & \dfrac{\partial^2 f(\hat{a}_0, \hat{a}_1)}{\partial a_1^2} \end{pmatrix}$$

θετικά ορισμένο.

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης από την (9.77) και τις αντικαθιστούμε στις ισότητες της (9.78), οπότε καταλήγουμε στο σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial f(a_0, a_1)}{\partial a_1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} n a_0 + (\sum_{i=1}^{n} x_i) a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) a_0 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει πάντοτε μοναδική λύση (ο βαθμός του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων a_0, a_1 έχει βαθμό 2), που είναι

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad \hat{a}_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{9.79}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.3, ο Hessian πίνακας της συνάρτησης $f(a_0, a_1)$,

$$H\left(\hat{a}_0, \hat{a}_1\right) = \begin{pmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος. Συνεπώς στο σημείο $(\hat{a}_0, \hat{a}_1)$ η $f(a_0, a_1)$ παρουσιάζει ελάχιστο άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων.

Επομένως, η καλύτερη γραμμική προσέγγιση των παρατηρήσεων επιτυγχάνεται από την «ευθεία ελαχίστων τετραγώνων»

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x, \tag{9.80}$$

όπου $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ δίνονται από τις ισότητες στην (9.79). ◆◆◆

Εφαρμογή 9.6 *Έστω ότι σε ένα στατιστικό δείγμα οι n παρατηρήσεις παρουσιάζονται με μορφή $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$ είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, που επηρεάζουν τη διαμόρφωση της y_i, και y_i είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Να γίνει η προσέγγιση των παρατηρήσεων από την πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση.*

Απόδειξη : Στην Εφαρμογή 9.5 προσεγγίσαμε τις παρατηρήσεις (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, που αντιστοιχούν σε σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, από μία «ευθεία ελαχίστων τετραγώνων», όπως δίνεται στη σχέση (9.80). Αν είχαμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε οι παρατηρήσεις είναι της μορφής (x_{i1}, x_{i2}, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, και αντιστοιχούν σε σημεία του χώρου $\mathbb{R}^3$, οπότε η καλύτερη προσέγγιση γίνεται από ένα «επίπεδο ελαχίστων τετραγώνων». Γενικεύοντας αυτήν την ιδέα, αν έχουμε k ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε οι παρατηρήσεις $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, y_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$, αντιστοιχούν σε σημεία του χώρου $\mathbb{R}^{k+1}$ και τα σημεία αυτά θα τα προσεγγίσουμε από το «πολυεπίπεδο ελαχίστων τετραγώνων»

Έστω ότι οι n παρατηρήσεις του δείγματος δίνονται ως εξής:

$$\begin{matrix} y_1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ y_2 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{matrix}$$

Πρέπει να προσεγγίσουμε τις n παρατηρήσεις του παραπάνω δείγματος από το «πολυεπίπεδο»

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k \,, \tag{9.81}$$

χρησιμοποιώντας το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων, σύμφωνα με το οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε τις τιμές κάποιων συντελεστών, $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_k$ στην (9.81), που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \,, \tag{9.82}$$

στην παλινδρόμηση

$$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \cdots + b_k x_{ik} + e_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{9.83}$$

Αναλυτικά, οι n παρατηρήσεις, που δίνονται από την (9.83), μπορούν να γραφούν με μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2k} \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = X\boldsymbol{b} + \boldsymbol{e} \tag{9.84}$$

όπου

$\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ είναι το διάνυσμα των παρατηρήσεων πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή,

$X \in M_{n\times(k+1)}(\mathbb{R})$ είναι ο πίνακας των παρατηρήσεων πάνω στις ανεξάρτητες μεταβλητές,

$\boldsymbol{b} = (b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_k)^t \in \mathbb{R}^{(k+1)\times 1}$ είναι το διάνυσμα των συντελεστών, που πρέπει να εκτιμήσουμε και

$\boldsymbol{e} = (e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ είναι το διάνυσμα των σφαλμάτων.

Το άθροισμα των τετραγώνων, που πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε, είναι αυτό που δίνεται στην (9.82). Συνδυάζοντας την (9.84) με τον ορισμό του μέτρου διανύσματος (Ορισμός 6.3 και ισότητες στην (6.13)) και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου στον $\mathbb{R}^n$ (Ορισμός 6.1, Πρόταση 6.1 και σχέση (6.8)), μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \boldsymbol{e}^t\boldsymbol{e} = \langle \boldsymbol{e},\boldsymbol{e}\rangle &= \langle \boldsymbol{y}-X\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}-X\boldsymbol{b}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, X\boldsymbol{b}\rangle - \langle X\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}\rangle + \langle X\boldsymbol{b}, X\boldsymbol{b}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - 2\langle X\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}\rangle + \langle X\boldsymbol{b}, X\boldsymbol{b}\rangle \\ &= \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{y} - 2(X\boldsymbol{b})^t\boldsymbol{y} + (X\boldsymbol{b})^t X\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{b}^t X^t\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}^t X^t X\boldsymbol{b} \\ &= f(\boldsymbol{b})\end{aligned} \tag{9.85}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.4 (ii), για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $f(\boldsymbol{b})$ στην (9.85), απαιτείται $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = 0$. Επειδή όλοι οι όροι του αθροίσματος της $f(\boldsymbol{b})$ είναι πραγματικοί αριθμοί, έχουμε

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = -2X^t\boldsymbol{y} + 2X^tX\boldsymbol{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; X^tX\boldsymbol{b} = X^t\boldsymbol{y}, \tag{9.86}$$

από όπου καταλήγουμε σε ένα σύστημα $k+1$ εξισώσεων με $k+1$ αγνώστους τις συντεταγμένες του διανύσματος $\boldsymbol{b}$, (υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας $X^tX \in M_{k+1}(\mathbb{R})$).

Για τον πίνακα X^tX ισχύει ότι $r(X^tX) = r(X) = k+1$ [(1)], που είναι ισοδύναμο με $\det(X^tX) \neq 0$, (Πόρισμα 4.3). Επομένως, ο πίνακας X^tX είναι αντιστρέψιμος, οπότε το σύστημα, που προκύπτει από την (9.86), έχει μοναδική λύση. Η λύση συμβολίζεται $\hat{\boldsymbol{b}} = (\hat{b}_0 \;\; \hat{b}_1 \;\; \cdots \;\; \hat{b}_k)^t$, και είναι

$$\hat{\boldsymbol{b}} = (X^tX)^{-1}X^t\boldsymbol{y}. \tag{9.87}$$

Επιπλέον, στην περίπτωση όπου $r(X) = k+1$, ο πίνακας X^tX είναι θετικά ορισμένος (η απόδειξη όπως στη σχέση (9.23)), οπότε για τον Hessian πίνακα της $f(\boldsymbol{b})$ ισχύει $H(\hat{\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\partial^2 f(\hat{\boldsymbol{b}})}{\partial \boldsymbol{b}\partial \boldsymbol{b}} = 2X^tX > 0$, άρα η συνάρτηση $f(\boldsymbol{b})$ στο $\hat{\boldsymbol{b}} = (\hat{b}_0 \;\; \hat{b}_1 \;\; \cdots \;\; \hat{b}_k)^t$ παρουσιάζει ελάχιστο άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων, (Πρόταση 9.4 (ii)).

Επομένως, η προσέγγιση των n παρατηρήσεων από το «πολυεπίπεδο των ελαχίστων τετραγώνων» είναι

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1x_1 + \hat{b}_2x_2 + \cdots + \hat{b}_kx_k\;, \tag{9.88}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{b}} = (\hat{b}_0 \;\; \hat{b}_1 \;\; \cdots \;\; \hat{b}_k)^t$ υπολογίζεται από τη σχέση (9.87).

[(1)] Οι στήλες του πίνακα X είναι πάντοτε γραμμικά ανεξάρτητες, διότι οι μεταβλητές x_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι η σχέση (9.88) λειτουργεί και ως προβλεπτικός μηχανισμός, για πρόβλεψη της y_f, όταν είναι γνωστές οι τιμές που λαμβάνουν οι ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_k$, (στην περίπτωση χρονολογικών ή διαστρωματικών πραγματικών στοιχείων). Για παράδειγμα, στην περίπτωση χρονολογικής σειράς, αν στην περίοδο πρόβλεψης, έστω στην περίοδο f, με $f > n$, $x_{f_1}, x_{f_2}, \ldots, x_{f_k}$ είναι οι τιμές των ανεξάρτητων (ερμηνευτικών) μεταβλητών, τότε

$$\hat{y}_f = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{f_1} + \hat{b}_2 x_{f_2} + \cdots + \hat{b}_k x_{f_k},$$

είναι η άριστη σημειακή γραμμική πρόβλεψη της

$$y_f = b_0 + b_1 x_{f_1} + b_2 x_{f_2} + \cdots + b_k x_{f_k} + e_f .$$

♦♦♦

9.7 Ασκήσεις

1. Σε κάθε μία από τις επόμενες τετραγωνικές μορφές να βρείτε την αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή της.

   i) $q_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$

   ii) $q_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

   iii) $q_3(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

2. Να εξετασθούν τα πρόσημα των επόμενων τετραγωνικών μορφών (θετικά ορισμένες, ημιθετικά ορισμένες κλπ.)

   i) $q_1(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

   ii) $q_2(\boldsymbol{x}) = 6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2 + 5x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

   iii) $q_3(\boldsymbol{x}) = 8x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

   iv) $q_4(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 + 8x_1x_2 - 16x_2^2 - 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

   Στη συνέχεια, να βρείτε μία διαγώνια μορφή για κάθε τετραγωνική μορφή.

3. Να αποδείξετε ότι :

   i) κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ θετικά ή αρνητικά ορισμένος είναι αντιστρέψιμος.

   ii) αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικά ορισμένος, τότε το ίχνος και η ορίζουσα του πίνακα είναι θετικοί αριθμοί.

   iii) αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικά ημιορισμένος, τότε ο πίνακας A^k, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$, είναι θετικά ημιορισμένος.

4. Να βρείτε το είδος των επόμενων επιφανειών

   i) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2 - 36 = 0$

   ii) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_1 + x_3 + 2 = 0$

   iii) $4x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 = 1$

5. Να βρείτε το είδος των επόμενων καμπύλων

   i) $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = 18$

   ii) $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 = 4$

6. Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα των επόμενων συναρτήσεων (αν υπάρχουν).

   i) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + 5$

   ii) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_3x_1 + 8 + 2x_2x_3$

   iii) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + 2x_3 - 20$

7. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις έχουν ακρότατα :

   i) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

   με τον περιορισμό $x_1x_2x_3 = 125$

   ii) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 20$

   με τους περιορισμούς $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ και $x_2 + x_3 = 0$.

8. Μια επιχείρηση παράγει τρία αγαθά. Έστω ότι η ημερήσια ποσότητα παραγωγής σε καθένα από αυτά είναι x_1, x_2, x_3 μονάδες, υπό τον περιορισμό $x_1x_2x_3 = 1000$. Η συνάρτηση κόστους δίνεται $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3$. Ποια πρέπει να είναι η παραγωγή, ώστε το κόστος να είναι ελάχιστο;

9. Έστω οι συναρτήσεις ζήτησης

$$p = 36 - 3x_1 \quad \text{και} \quad q = 40 - 5x_2,$$

   και η συνάρτηση συνολικού κόστους $c(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$. Να προσδιοριστούν οι ποσότητες οι οποίες μεγιστοποιούν το κέρδος και να βρεθεί το μέγιστο κέρδος.

10. i) Να βρείτε την ιδιάζουσα ανάλυση των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Να υπολογίσετε τους γενικευμένους αντιστρόφους πίνακες A^+, B^+ των πινάκων A και B, αντίστοιχα.

11. Έστω ο πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ με $A = BC$, όπου $B \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$, $C \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ και $r(A) = r(B) = r(C) = k$. Να αποδείξετε ότι ο γενικευμένος αντίστροφος (ψευδοαντίστροφος) του A είναι ο πίνακας $A^+ = C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t$.

Υπόδειξη : Να αποδείξετε ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες που διατυπώνονται στην Πρόταση 9.8.

12. Έστω ο πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

i) $(A^+)^+ = A$,

ii) $(cA^+) = c^{-1}A^+$, για κάθε $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

iii) $(A^+)^t = (A^t)^+$

iv) $r(A^+) = r(A)$

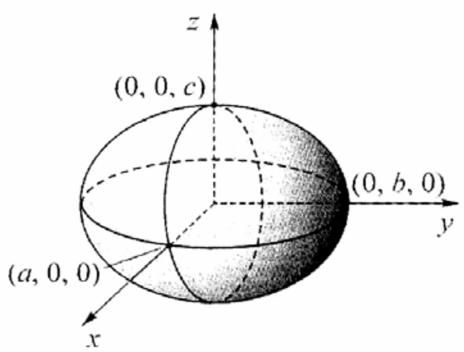
v) Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός, τότε ο πίνακας A^+ είναι συμμετρικός.

vi) Να αποδείξετε με (αντι)παράδειγμα ότι $(AB)^+ \neq B^+A^+$

vii) Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ και $r(A) = r(B) = n$, τότε ισχύει $(AB)^+ = B^+A^+$.

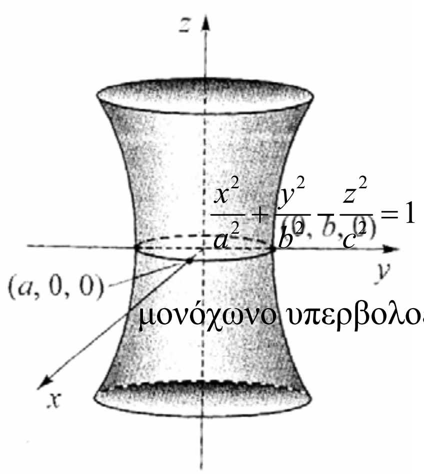
viii) Αν $A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^t$, όπου $\boldsymbol{u} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ και $\boldsymbol{v} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, τότε $A^+ = \dfrac{1}{(\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{u})}A^t$.

Επιφάνειες 2ου βαθμού



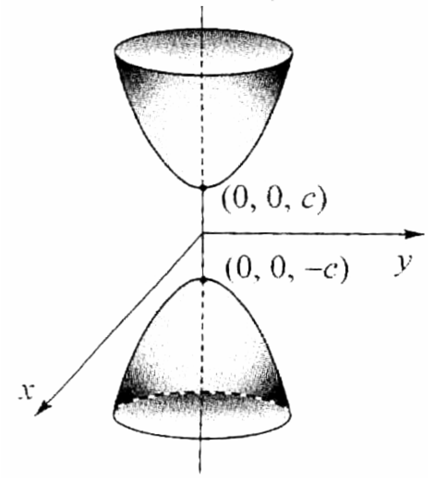
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ελλειψοειδές



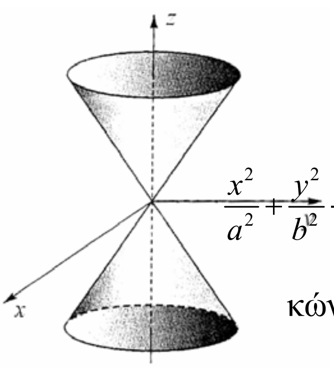
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

μονόχωνο υπερβολοειδές



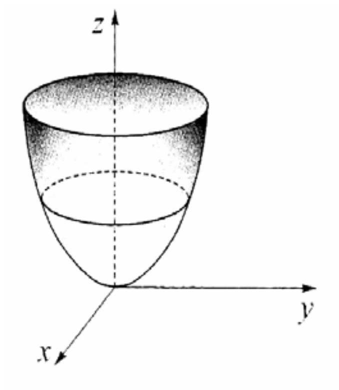
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

δίχωνο υπερβολοειδές



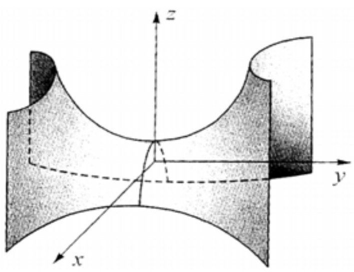
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

κώνος



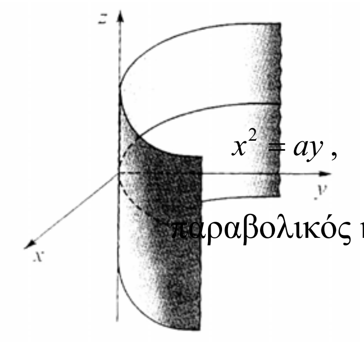
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

ελλειπτικό παραβολοειδές



$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

υπερβολικό παραβολοειδές



$$x^2 = ay, \quad a > 0$$

παραβολικός κύλινδρος